

第六章 线性系统的校正方法

6-1 系统的设计与校正问题



6-2 串联校正



6-3 反馈校正



6-4 复合校正



6-1 系统的设计与校正问题

■ 系统分析：

- 实际系统→建模→计算→性能指标,研究性能指标与参数间的关系。

■ 系统设计：

- 被控对象，控制要求→选择元部件→固有系统→**校正**→满足要求的系统。



一、性能指标

1、时域性能指标： $\delta\%$ 、 t_s 、 e_{ss} 。

2、频域性能指标

闭环频域指标： M_r 、 ω_b 、 $M(0)$ ；

开环频域指标： γ 、 ω_c 、 $K_{p/v/a}$

3、频域与时域指标间的关系

一阶系统： $\omega_b = \frac{1}{T}, t_s = \frac{3}{\omega_b}$



二阶系统:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \zeta \leq 0.707$$

$$M_r = f(\zeta) \Rightarrow M_r \uparrow \rightarrow \sigma\% \uparrow$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}, \zeta \leq 0.707$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{2-4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$\omega_{r/b/c} = f(\zeta, \omega_n) \Rightarrow \omega_{r/b/c} \uparrow \rightarrow t_{p/s} \downarrow$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$

$$\gamma = f(\zeta) \Rightarrow \gamma \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow$$



高阶系统:

$$\begin{cases} \sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \\ t_s = \frac{\pi \left[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 \right]}{\omega_c} \end{cases}$$

$$35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

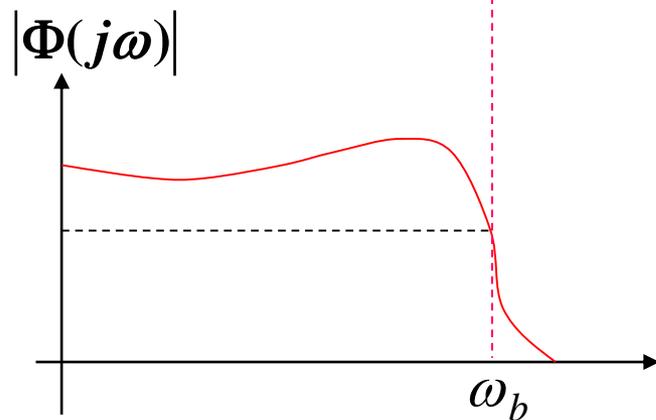
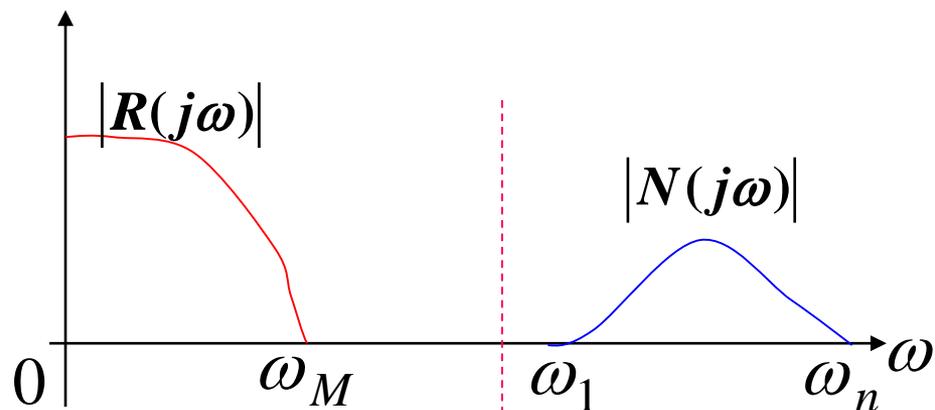
$$M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma}$$



二、带宽的确定

1) ω_b 的选择要兼顾跟踪输入信号的能力和抗干扰的能力。

2) 若输入信号的带宽为 $0 \sim \omega_M$ ，扰动信号带宽为 $\omega_1 \sim \omega_N$ ，则 $\omega_b = (5 \sim 10) \omega_M$ ，且使 $\omega_1 \sim \omega_N$ 置于 ω_b 之外。



$$\omega_b = (5 \sim 10) \omega_M$$

$$\omega_b \notin (\omega_1 \sim \omega_N)$$

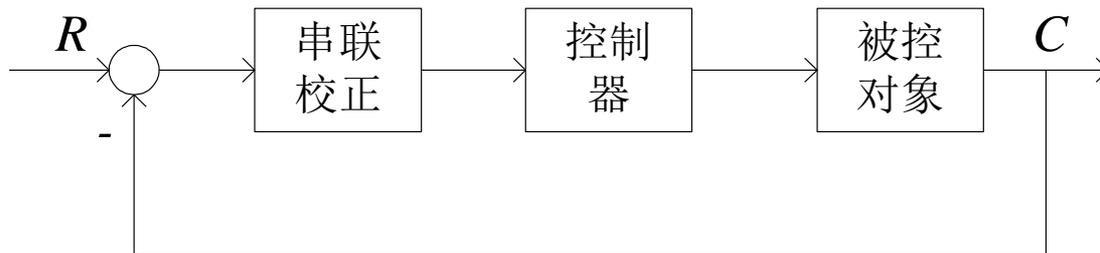


三、校正方式

1、串联校正

位于：

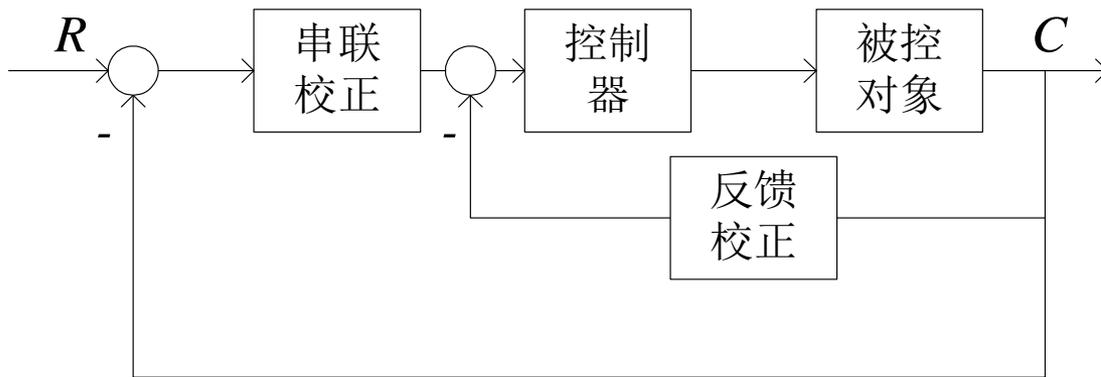
相加点之后，
放大器之前



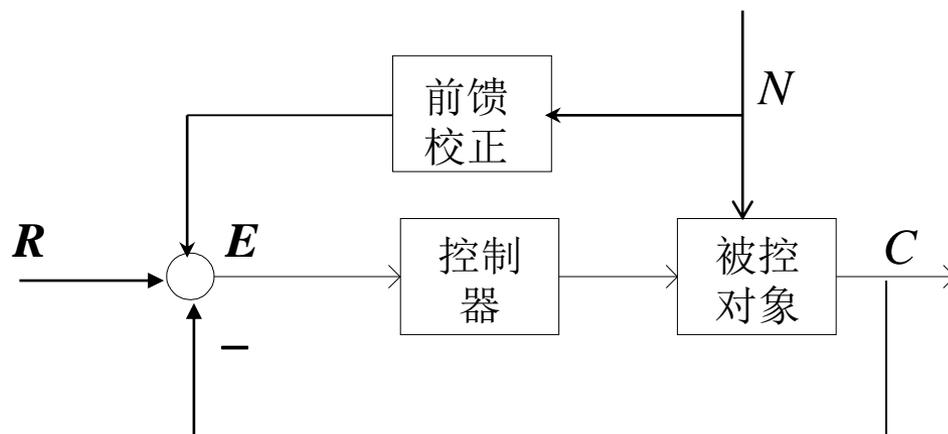
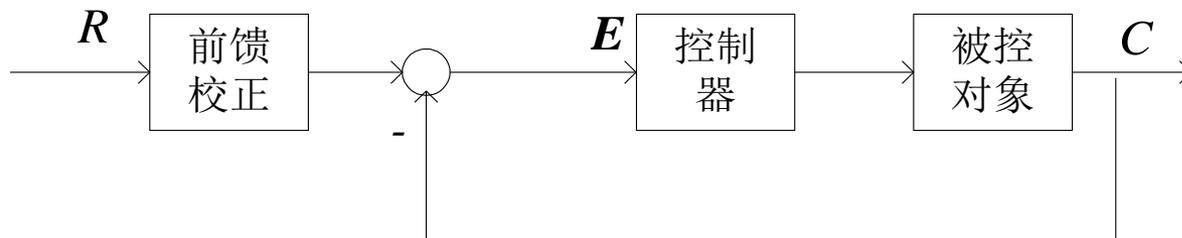
2、反馈/并联校正

位于：

主反馈内部的
局部反馈通道



3、前馈/顺馈校正：位于主反馈回路之外



4、复合校正：前馈+反馈校正



四、基本控制规律 (以串联校正方式为例)

1、比例控制规律(P控制器)

$$G_c(s) = K_p \quad K_p \uparrow \Rightarrow e(\infty) \downarrow, \text{ 但稳定性} \downarrow$$

2、比例微分 (PD) 控制规律 (主要用于提高动态性能)

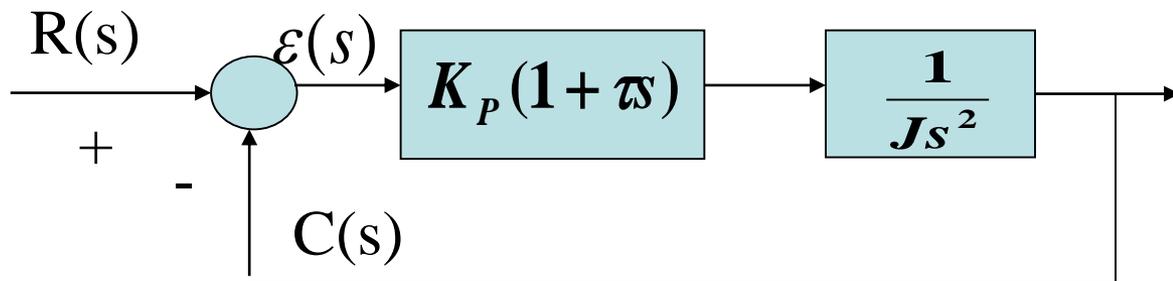
$$m(t) = K_p e(t) + K_p \tau e'(t) \quad G_c(s) = K_p (1 + \tau s)$$

增加一个开环零点, 同时了增加系统的阻尼程度, 改善系统的稳定性和动态性能。

PID: Proportion Integration Differentiation



例6-1： 设比例 - 积分控制系统如图所示，分析PD控制器对系统性能的影响。



加入前，系统
闭环传函为

$$\Phi(s) = \frac{1}{Js^2 + 1}$$

稳定性：

加入后，系统
闭环传函为

$$\Phi(s) = \frac{K_p(1 + \tau s)}{Js^2 + K_p \tau s + K_p}$$

动态性：

注意：微分控制D只对动态过程有影响，对稳态过程不起作用且对噪声敏感，不宜以串联校正方式单独使用！



3、积分I控制规律

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad G(s) = \frac{K_i}{s}$$

可提高系统型别，有利于准确性的提高；
可产生 -90° 相角，对稳定性不利。
一般不单独使用。

4、比例积分PI控制规律（主要用于提高稳态性能）

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

可提高系统型别，有利于准确性的提高；
零点的加入可削弱对系统稳定性的不利影响。



5、PID控制规律

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p \tau \frac{de(t)}{dt} \quad G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \tau s\right)$$

给开环带来一个零值极点和两个负实数零点，可同时提高系统的动静态性能指标。

以开环频率特性的角度来讲：

I部分体现在频率特性的低频段，以提高系统的稳态性能；

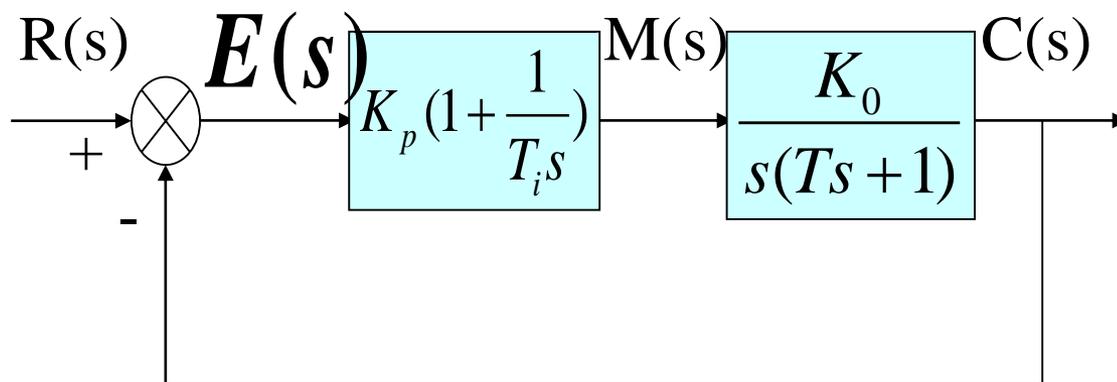
而D部分发生在频率特性的中频段，以改善系统的动态性能。



例6-2 设比例-积分控制系统如图6-9所示。其中不可变部分的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K_0}{s(Ts + 1)}$$

试分析PI控制器对系统稳态性能的改善作用。



加入PI前:

开环传函: $G_K(s) = \frac{K_0}{s(Ts+1)}$ 特征方程: $Ts^2 + s + K_0 = 0$

静态误差系数: $K_p = \infty, K_v = K_0, K_a = 0$

稳态误差: $e_{ssp} = 0, e_{ssv} = 1/K_0, e_{ssa} = \infty$

加入PI后:

开环传函: $G_K(s) = \frac{K_p K_0 (T_i s + 1)}{T_i s^2 (Ts + 1)}$

特征方程: $T_i T s^3 + T_i s^2 + K_p K_0 T_i s + K_p K_0 = 0$

静态误差系数: $K_p = \infty, K_v = \infty, K_a = \frac{K_p K_0}{T_i}$

稳态误差: $e_{ssp} = 0, e_{ssv} = 0, e_{ssa} = 1/K_a$

结论: PI校正可保证稳定的前提下提高系统稳态性能。



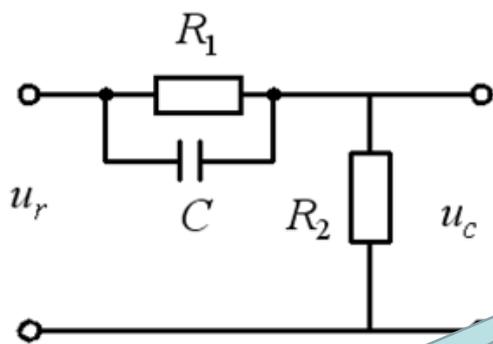
6-2 常用校正装置及其特性

- 校正装置按其使用的动力源和信号性质的不同，可分为：**电气型**、**气动型**、**液压型**及**机械型**等。

一、无源校正网络

1. 无源超前网络

$$G_C(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$



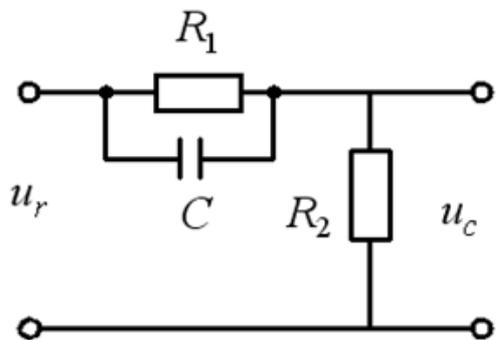
$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1 \\ T = \frac{R_1 \cdot R_2 C}{R_1 + R_2} \end{array} \right.$$

分度系数

时间常数

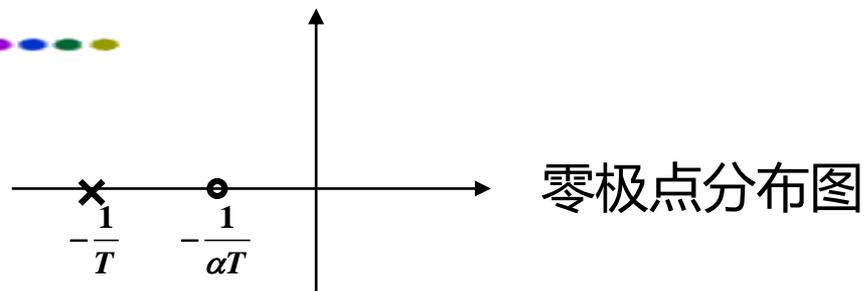


无源超前校正网络

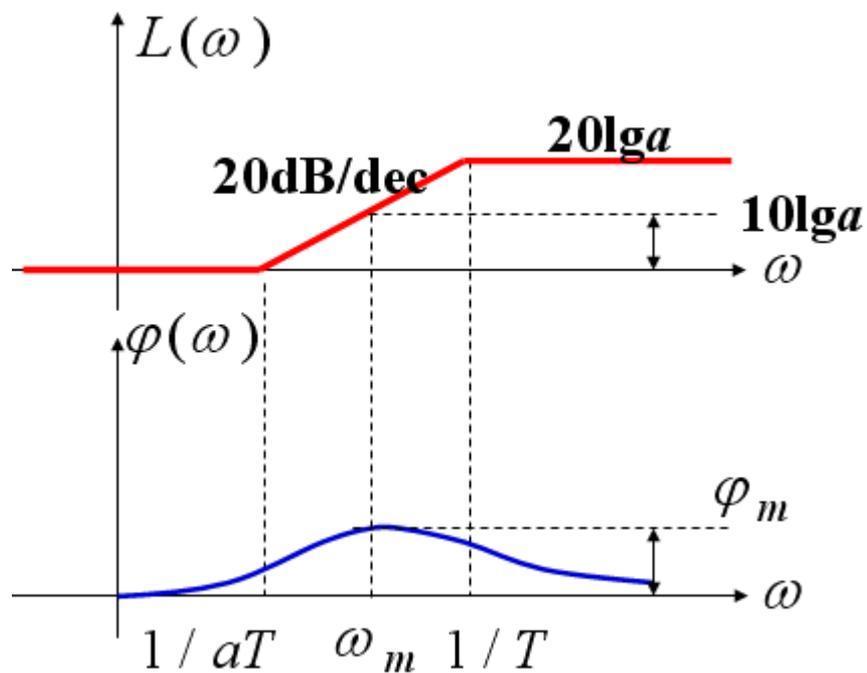


$$G_C(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$

$$\begin{cases} a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1 \\ T = \frac{R_1 \cdot R_2 C}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

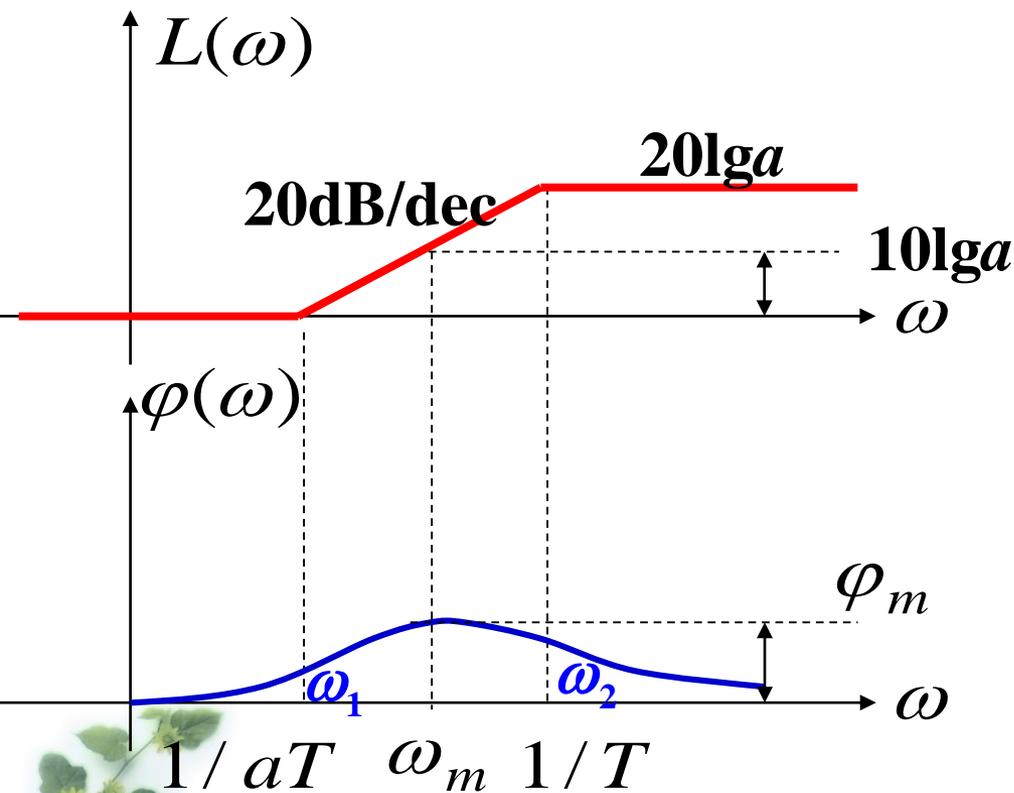


$$a \cdot G_C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \text{ 的伯德图如下}$$



$$a \cdot G_C(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$

对数频率特性如图示



$$\varphi(\omega) = \text{tg}^{-1} aT\omega - \text{tg}^{-1} T\omega$$

$$\varphi'(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$



$$\lg \omega_m = \frac{\lg \omega_1 + \lg \omega_2}{2}$$

即 ω_m 位于 ω_1 、 ω_2 的几何中心点。

$$\varphi_m = \text{tg}^{-1} \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \sin^{-1} \frac{a-1}{a+1} > 0$$

$$L(\omega_m) = 10\lg a$$

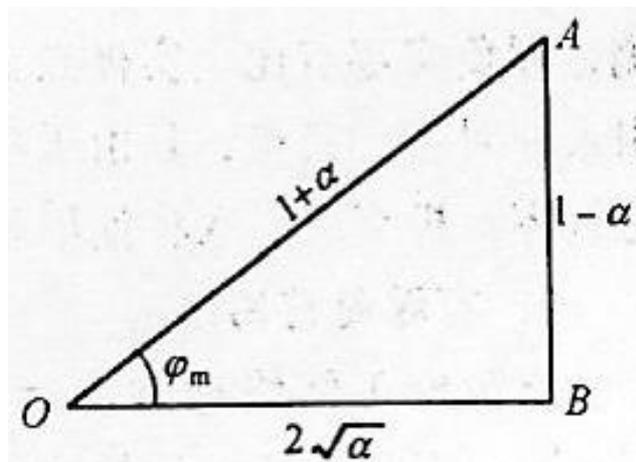


图 6-6 φ_m 的几何关系

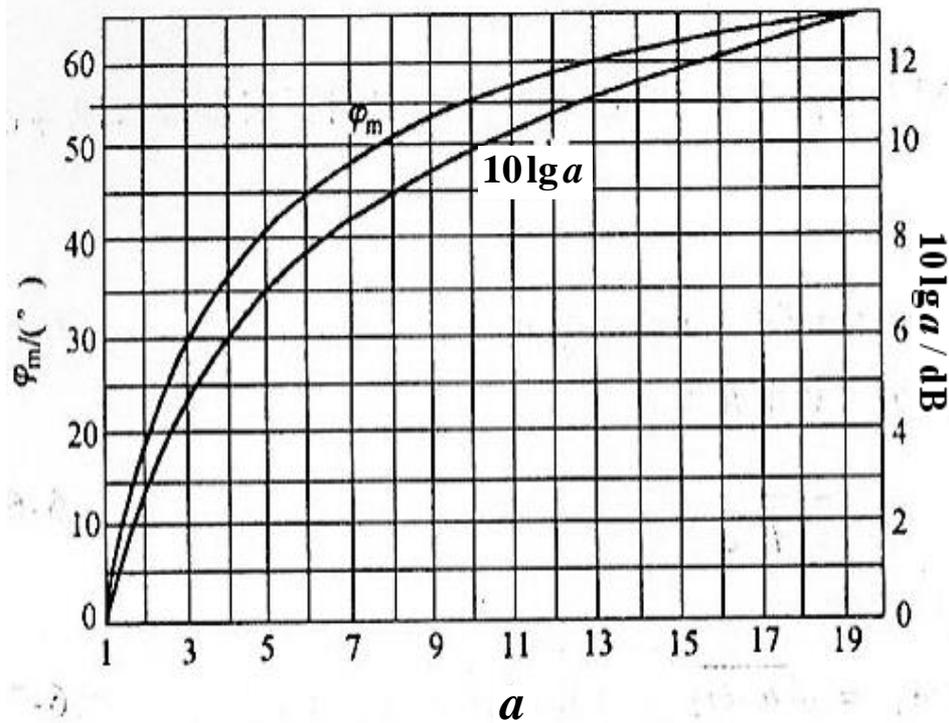


图6-12 超前网络中心 φ_m 、 $10\lg a$ 与 a 的关系曲线

由图可以看出

$$a \uparrow \Rightarrow \begin{cases} \varphi_m \uparrow \\ L(\omega_m) = 10\lg a \uparrow \end{cases}$$

a 一般不超过 20.



小结 串联超前校正的优点和缺点

(1) 优点:

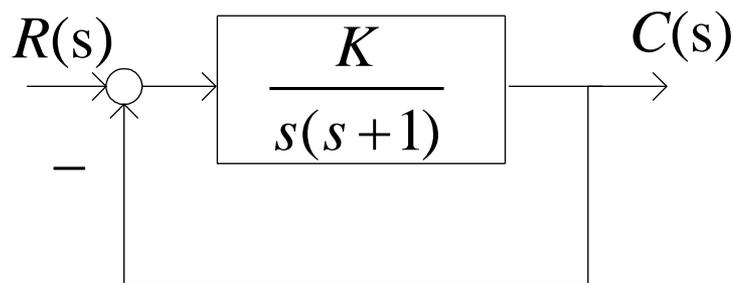
- ❖ 使开环截止频率增加，响应速度加快。
- ❖ 使相角裕度增加，超调量减小。

(2) 缺点:

- ❖ 由于频率特性高频段幅值的提高，降低了系统抗干扰能力。
- ❖ 需提高放大器的放大系数（无源），以补偿超前网络增益的衰减。



例题6.3： 控制系统如图所示， (P227 6-3 串联校正)



要求在单位斜坡信号作用下，输出稳态误差： $e_{ss} \leq 0.1rad$

开环系统截止频率： $\omega_c'' \geq 4.4 (rad / sec)$

相角裕度： $\gamma'' \geq 45^\circ$ 幅值裕度： $L_h'' \geq 10dB$

试设计串联无源超前网络。



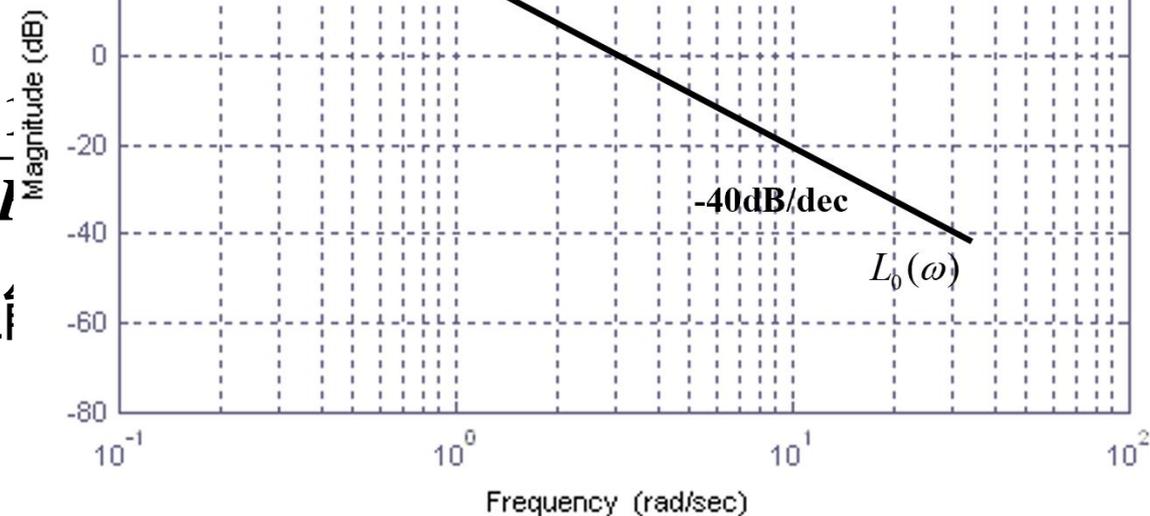
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

(1) 由 e_{ss} 确定 K

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{l}$$

(2) 考察原有系统性能

做出未校正的



$$\omega_{c_0} = 3.1 \text{ rad / s}, \gamma_0 = 17.9^\circ$$

与要求的指标进行对比：

$$\omega_{c_0} < \omega_c'', \gamma_0 < \gamma''$$

故应采用超前校正。



(3) 进行超前校正的设计

为了充分利用超前角, 令 $\omega_m = \omega_c'' = 4.4 \text{ rad/s}$

由原有系统知 $L_0(\omega_m) = -6 \text{ dB}$, 则校正装置满足

$$L_c(\omega_m) = +6 \text{ dB} \Rightarrow 10 \lg a = +6 \text{ dB} \rightarrow a = 4$$

确定校正装置的时间常数T

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{a}} = \frac{1}{8.8} = 0.114$$

故超前校正传递函数为

$$aG_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1} = \frac{0.456s + 1}{0.114s + 1}$$



(4) 检验

校正后系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= G_0(s) G_c(s) \\ &= \frac{10}{s(s+1)} \cdot \frac{0.456s + 1}{0.114s + 1} \end{aligned}$$

经计算

$$\omega_c = 4.4 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\gamma = 49.7^\circ$$

$$L_h = +\infty$$

满足性能指标要求。



(5) 确定校正装置

$$a G_c(s) = \frac{0.456s + 1}{0.114s + 1}$$

选用无源超前网络来实现

$$a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 4 \Rightarrow R_1 = 3R_2$$

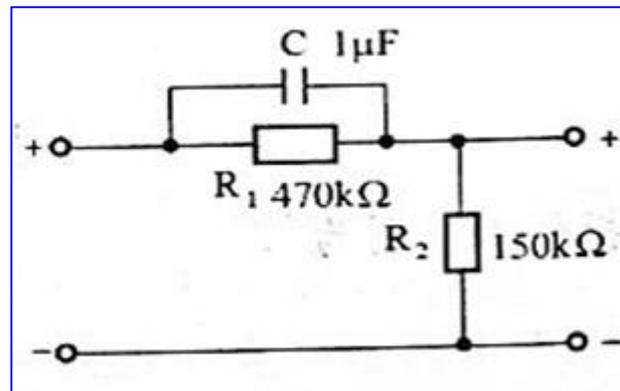
$$\Rightarrow T = \frac{3R_2 C}{4} = 0.114$$

取 $C = 1 \mu\text{f}$, 则

$$R_2 = 152 \text{K}\Omega \Rightarrow R_1 = 456 \text{K}\Omega$$

取标称值 $R_2 = 150 \text{K}\Omega$

$R_1 = 470 \text{K}\Omega$

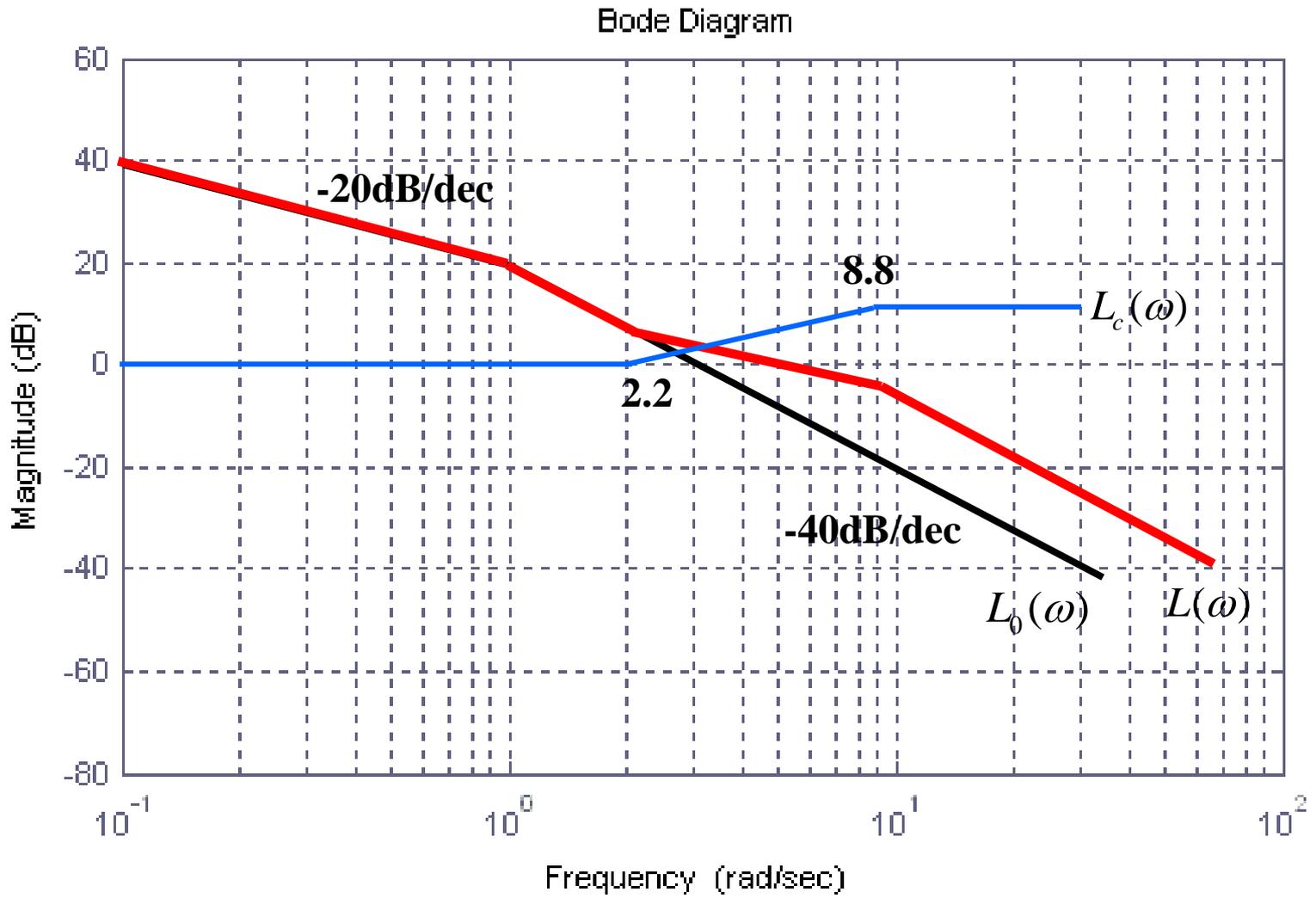


$$G_c(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$

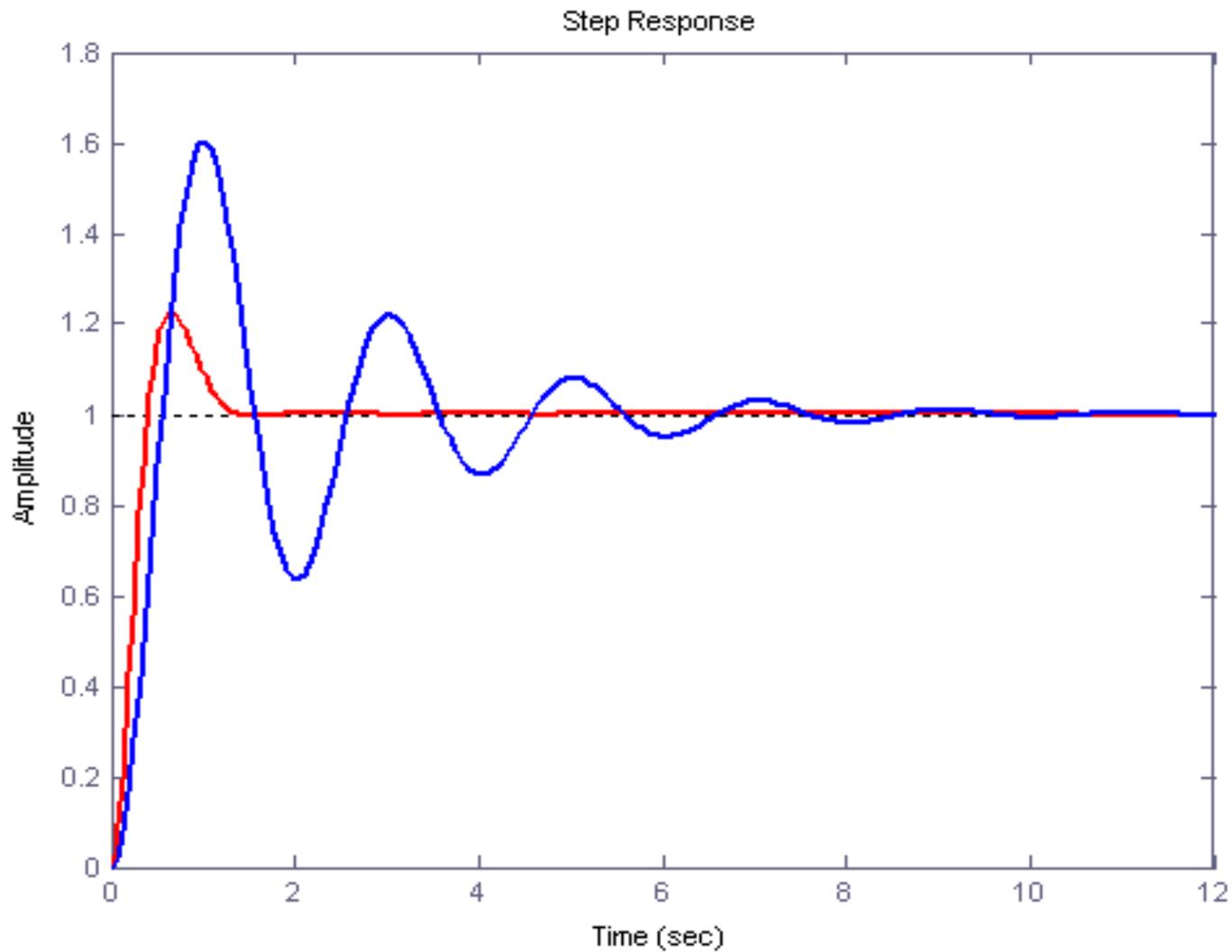
$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1 \\ T = \frac{R_1 \cdot R_2 C}{R_1 + R_2} \end{array} \right.$$

注意：将原有系统的开环增益K放大a倍。





自动

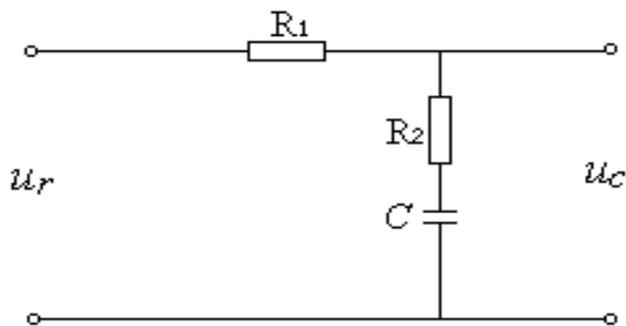


校正前: $\sigma\% = 60\%, t_s = 7s$

校正后: $\sigma\% = 22\%, t_s = 1.1s$



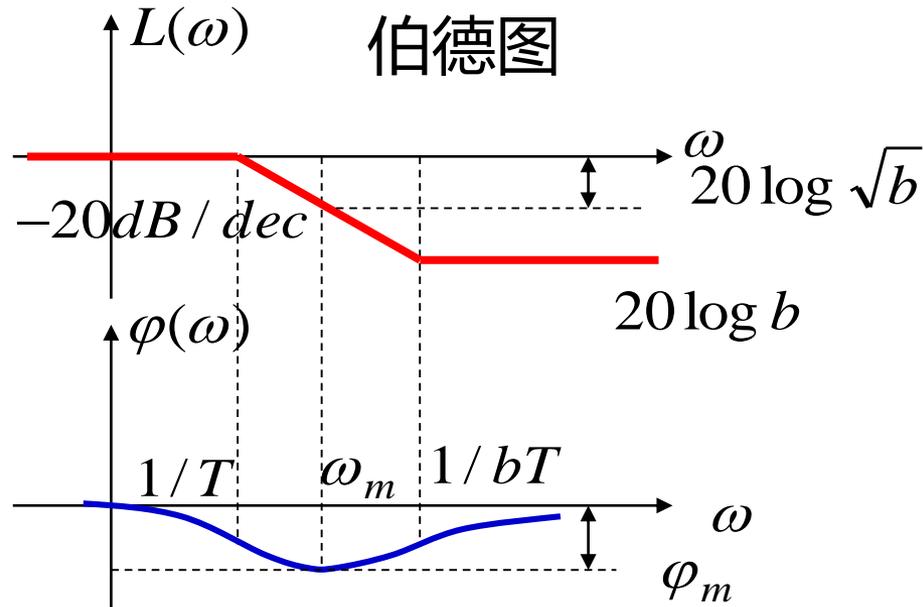
2、无源滞后网络



$$G_c(s) = \frac{bTs + 1}{Ts + 1}$$

$$b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

$$T = (R_1 + R_2)C$$



$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}}$$

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{b-1}{b+1}$$

$$L(\omega_m) = 10 \lg b$$



P222 式6-23和式6-24之间:

滞后网络的特点

无源滞后网络对低频信号不产生衰减, 对高频噪声信号有削弱作用, b 值越小, 通过滞后网络的噪声电平就越低。

滞后网络的设计

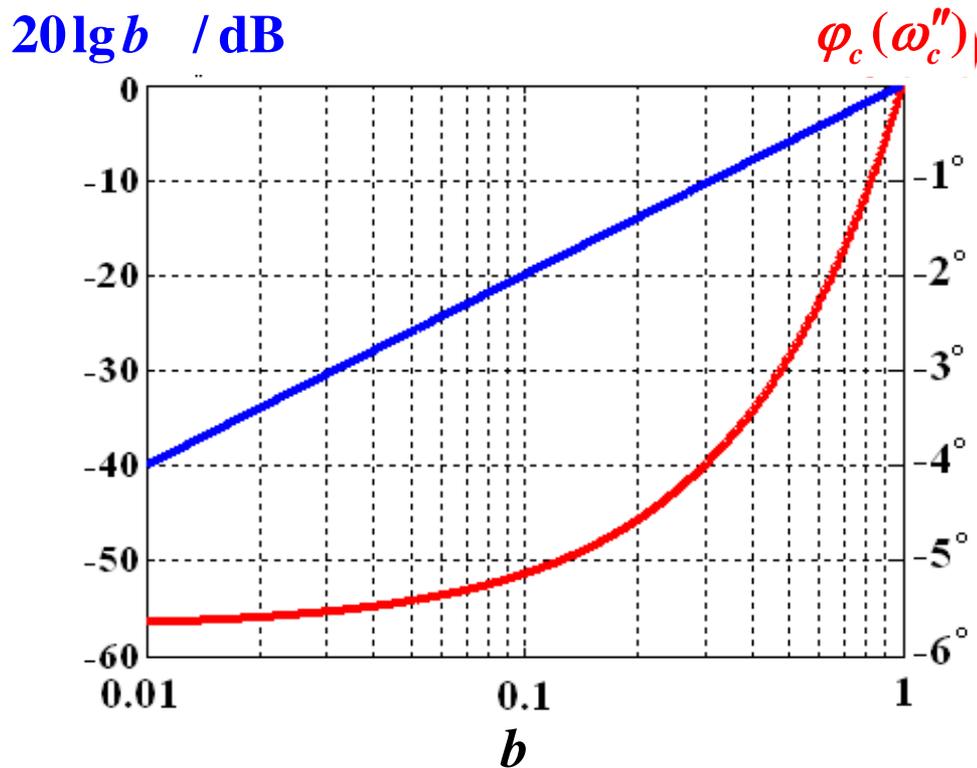
利用滞后网络的高频 $L(\omega) < 0$, 降低系统的 ω_c , 提高 γ 。

为此, 要避免因滞后网络的 $\varphi(\omega_m)$ 发生在已校正的 ω_c'' 附近。

通常使滞后网络的 $\omega_2 = \frac{1}{bT} = \omega_c'' / 10$ 。



ω_c'' 处滞后角的近似计算公式为 $\varphi_c(\omega_c'') = \arctan[0.1(b-1)]$



b 与 $\varphi_c(\omega_c'')$ 和 $20\lg b$ 的关系曲线



- **例6-4 要求** $K_v = 30s^{-1}$, $\gamma'' \geq 40^\circ$, $L_h'' \geq 10dB$, $\omega_c'' \geq 2.3rad / s$
试设计串联校正装置。

解： (1) 稳态指标确定K

$$K_v = K = 30$$

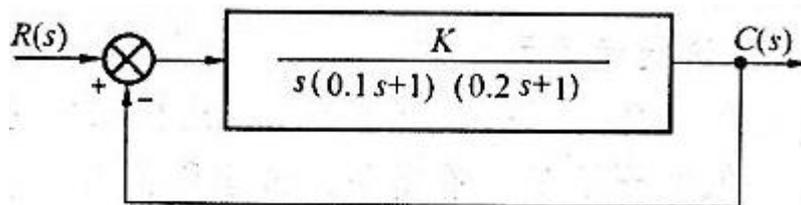


图6-19 例 6-4 系统的结构图

(2) 考察原有系统性能指标，确定串联校正类型

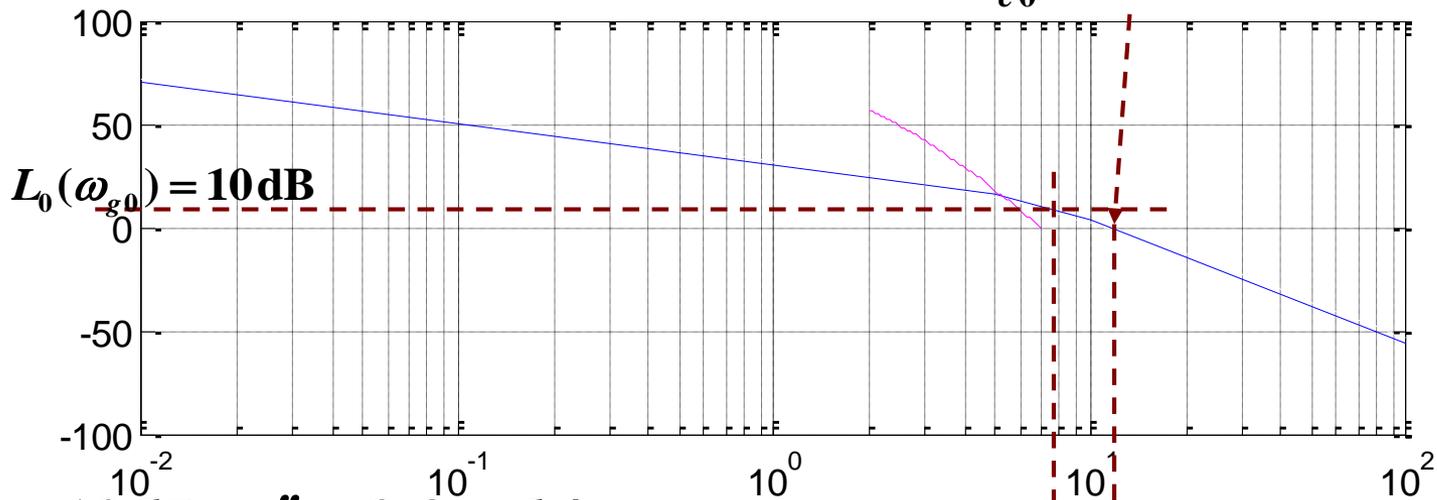
$$\therefore G_0(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

绘出未校正系统 $L_0(\omega)$ 、 $\varphi_0(\omega)$

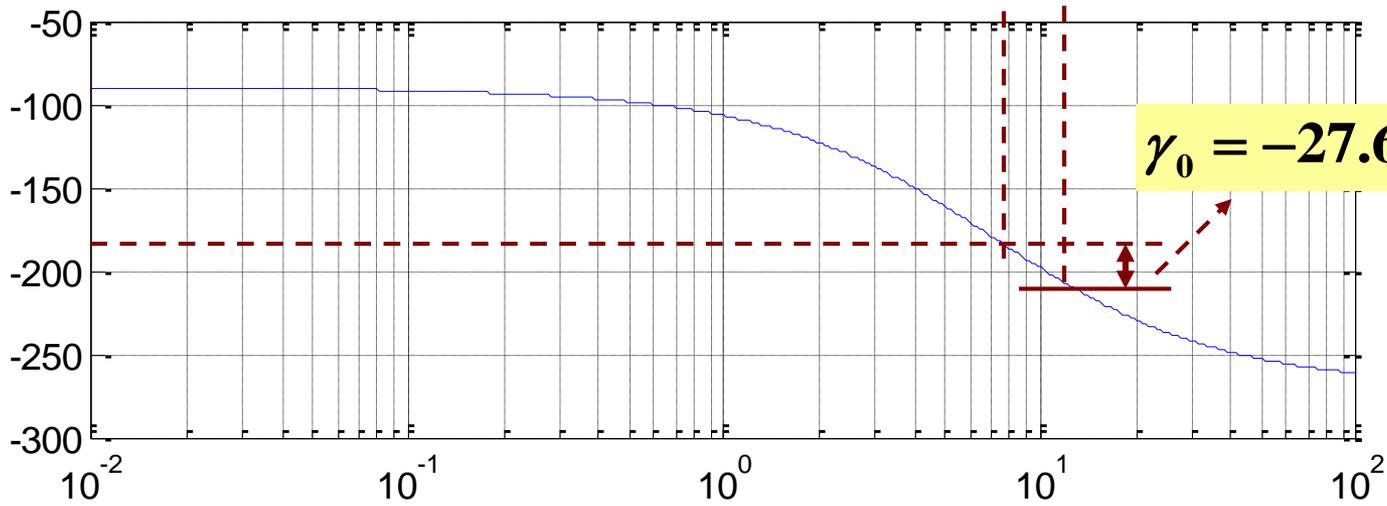


由图可得

$$\omega_{c_0} = 12 \text{ rad/s}$$



$$\gamma'' \geq 40^\circ, L_h'' \geq 10 \text{ dB}, \omega_c'' \geq 2.3 \text{ rad/s}$$



由图得 $\omega_{c_0} = 12 \text{rad} / \text{s}$, $\gamma_0 = -27.6^\circ$ 系统不稳定。

要想满足要求 $\gamma'' \geq 40^\circ$, $L_h'' \geq 10 \text{dB}$, $\omega_c'' \geq 2.3 \text{rad} / \text{s} \Rightarrow \omega_c \downarrow, \gamma \uparrow$

(3) 串联滞后校正的设计

考虑到滞后网络在 ω_c'' 处产生相角滞后, 故令

$$\gamma_0(\omega_c'') \geq 40^\circ + 6^\circ \Rightarrow \text{取 } \omega_c'' = 2.7 \text{rad} / \text{s}$$

由 $L_0(\omega_c'') = +21 \text{dB}$ 知 $L_c(\omega_c'') = -21 \text{dB}$ 即

$$20 \lg b = -21 \text{dB} \Rightarrow b = 0.09$$

由 $\frac{1}{bT} = 0.1\omega_c''$ 可得 $T = 41$



故串联滞后网络传递函数为

$$G_c(s) = \frac{bTs + 1}{Ts + 1} = \frac{3.7s + 1}{41s + 1}$$

(4) 检验

校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)} \cdot \frac{3.7s+1}{41s+1}$$

经计算得

$$\omega_x = 6.8 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\gamma'' = 41.3^\circ$$

$$L_h'' = 10.5 \text{ dB}$$

校正后系统性能指标满足要求。



(5) 确定校正装置

$$G_c(s) = \frac{bTs + 1}{Ts + 1} = \frac{3.7s + 1}{41s + 1}$$

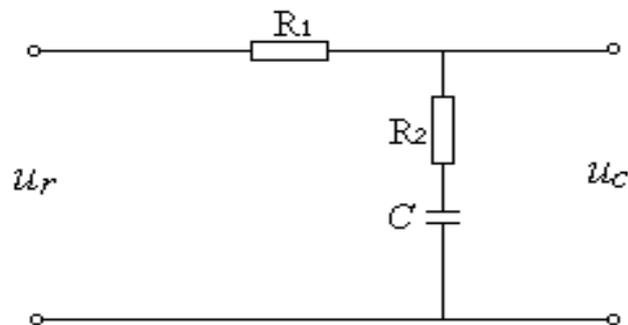
选取无源校正装置

$$b = 0.09, T = 41 \Rightarrow$$

$$C = 9.1\mu f$$

$$R_1 = 4099K\Omega$$

$$R_2 = 405K\Omega$$



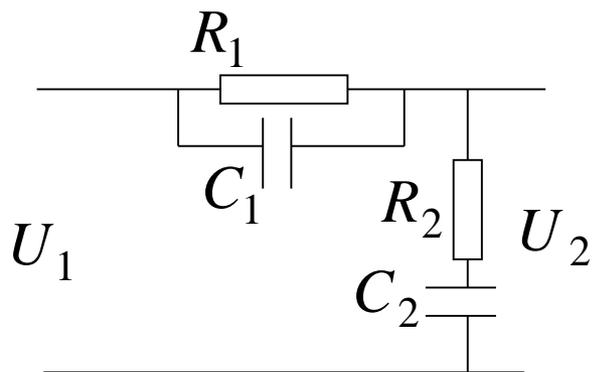
$$G_c(s) = \frac{bTs + 1}{Ts + 1}$$

$$b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

$$T = (R_1 + R_2)C$$



3、无源滞后 - 超前网络



$$G_c(s) = \frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$$

↓

$$G_c(s) = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

其中 $T_a = R_1C_1$, $T_b = R_2C_2$, $T_{ab} = R_1C_2$

$$T_1 T_2 = T_a T_b, \quad T_1 + T_2 = T_a + T_b + T_{ab}$$

设

$T_1 > T_a$ 令 $\frac{T_1}{T_a} = \frac{T_b}{T_2} = \alpha$ 那么 $\alpha > 1, T_1 > T_a > T_b > T_2$



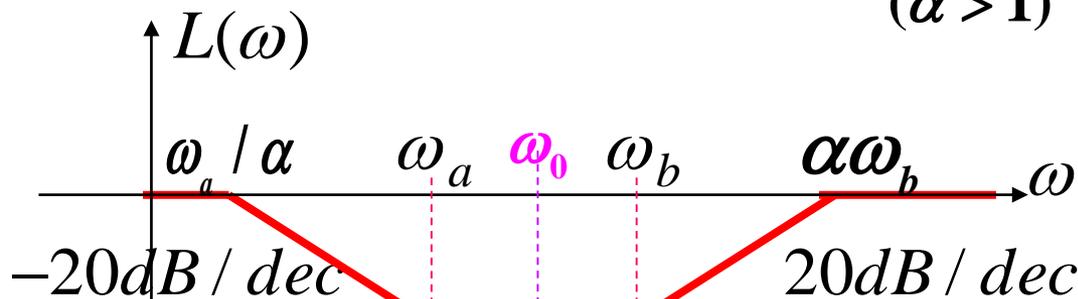
3、无源滞后 - 超前网络

故 $T_1 = \alpha T_a$, $T_2 = T_b / \alpha$

传递函数可写为

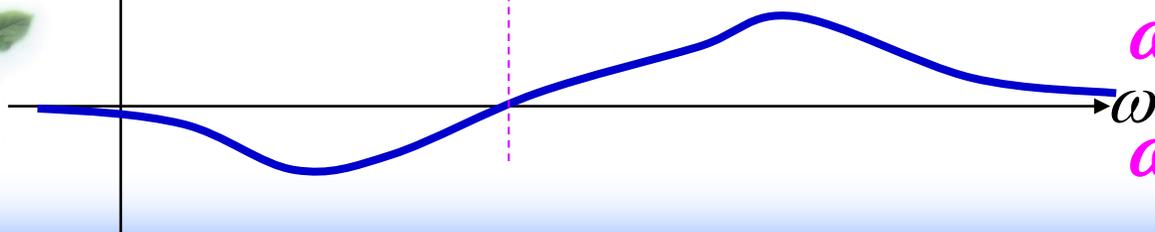
$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(T_a s + 1)}{(\alpha T_a s + 1)}}_{\text{滞后校正}} \cdot \underbrace{\frac{(T_b s + 1)}{(\frac{T_b}{\alpha} s + 1)}}_{\text{超前校正}},$$

($\alpha > 1$)



$$\text{令 } \varphi(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_a \omega_b}$$

$\varphi(\omega)$



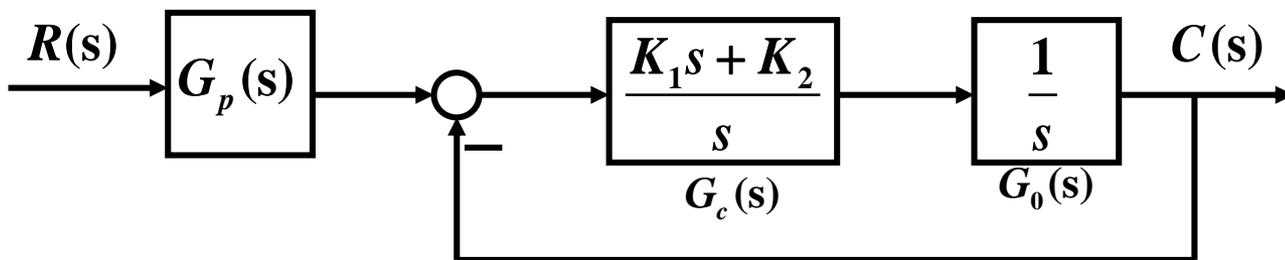
$\omega < \omega_0$, 相位滞后;

$\omega > \omega_0$, 相位超前;

6-4 前馈校正

例6-6 设带有前置滤波器的控制系统如图所示。图中，被控对象为 $G_0(s)=1/s$,串联校正网络 $G_c(s)$ 为PI控制器， $G_p(s)$ 为前置滤波器。设计要求：

- ①系统阻尼为 $\zeta_d=0.707$;
- ②阶跃响应的超调量 $\sigma\% \leq 5\%$;
- ③阶跃响应的调节时间 $t_s \leq 0.6 (\Delta=2\%)$ 。试设计 K_1 、 K_2 及 $G_p(s)$ 。



解：系统闭环传函为

$$\Phi(s) = \frac{(K_1s + K_2)G_p(s)}{s^2 + K_1s + K_2}$$

系统特征方程为

$$s^2 + K_1s + K_2 = s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

根据设计要求有

$$\begin{cases} \zeta_d = 0.707 \\ t_s = \frac{4.4}{\zeta_d\omega_n} \leq 0.6 \Rightarrow \zeta_d\omega_n \geq 7.33 \end{cases}$$

现取 $\zeta_d\omega_n = 8$ 得 $\omega_n = 8\sqrt{2}$ 故

$$K_1 = 2\zeta_d\omega_n = 16, K_2 = \omega_n^2 = 128$$



未引入校正前，相当于 $G_p(s) = 1$ 此时，闭环传函为

$$\Phi(s) = \frac{(K_1s + K_2)}{s^2 + K_1s + K_2} = \frac{16(s + 8)}{s^2 + 16s + 128}$$

系统为有零点的二阶系统，由公式（参见P93，3-3/5.二阶系统性能的改善）可计算

$$t_r = 0.07$$

$$t_p = 0.2$$

$$\sigma\% = 20.2\%$$

$$t_s = 0.54$$

由于零点的影响，
超调量不满足要求。



利用前置滤波器抵消闭环零点对系统的不利影响，并保持系统原有的直流增益即 $\Phi(0)$ 不变。

$$\text{令 } G_p(s) = \frac{8}{s+8}$$

则闭环传函变为

$$\Phi(s) = \frac{16(s+8)}{s^2+16s+128} \cdot \frac{8}{s+8} = \frac{128}{s^2+16s+128}$$

可得性能指标如下

$$t_r = 0.29$$

$$t_p = 0.39$$

$$\sigma\% = 4.3\%$$

$$t_s = 0.55$$

满足要求。

$$t_r = 0.07$$

$$t_p = 0.2$$

$$\sigma\% = 20.2\%$$

$$t_s = 0.54$$



作业

- 课本例题：
- 6-3, 6-4, 6-6

