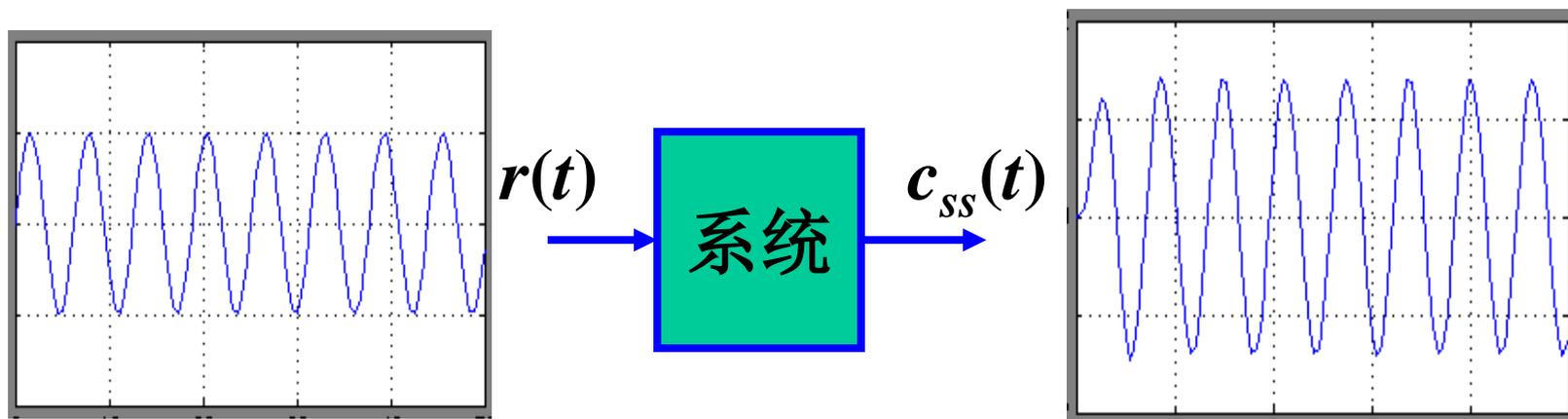


第五章 线性系统的频域分析法

频域分析法是研究自动控制系统的一种工程方法，它能反映不同频率的正弦信号作用下系统的性能。

5.1 频率特性

一、基本概念



一个稳定的系统，假设有一正弦信号输入

$$r(t) = A_r \sin \omega t$$

其稳态输出可写为

$$c_{ss}(t) = A_c \sin(\omega t + \varphi)$$

A_c -- 稳态输出的振幅
 φ -- 稳态输出的相角

稳态输出的振幅与输入振幅之比，称为**幅频特性**。

$$A = \frac{A_c}{A_r}$$

稳态输出的相位与输入相位之差 φ ，称为**相频特性**。

$A \angle \varphi$ 称为**频率特性**。

二、求取频率特性的数学方法

求RC网络的频率特性

如果输入正弦电压信号

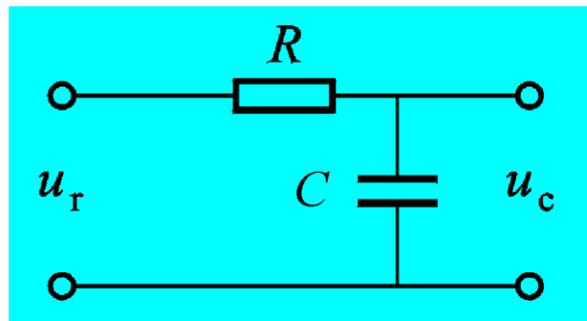
$$u_r = A_r \sin \omega t$$

其拉氏变换

$$U_r(s) = \frac{A_r \omega}{s^2 + \omega^2}$$

传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad T = RC$$



所以系统的输出为

$$U_c(s) = \Phi(s)U_r(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{A_r \omega}{s^2 + \omega^2}$$

拉氏反变换为

$$u_c(t) = \frac{A_r \omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{A_r}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

式中第一项为动态分量，第二项为稳态分量。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_c(t) = \frac{A_r}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

稳态输出: $u_r = A_r \sin \omega t$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_c(t) = \frac{A_r}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

幅频特性: $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ 二者仅是频率的函数

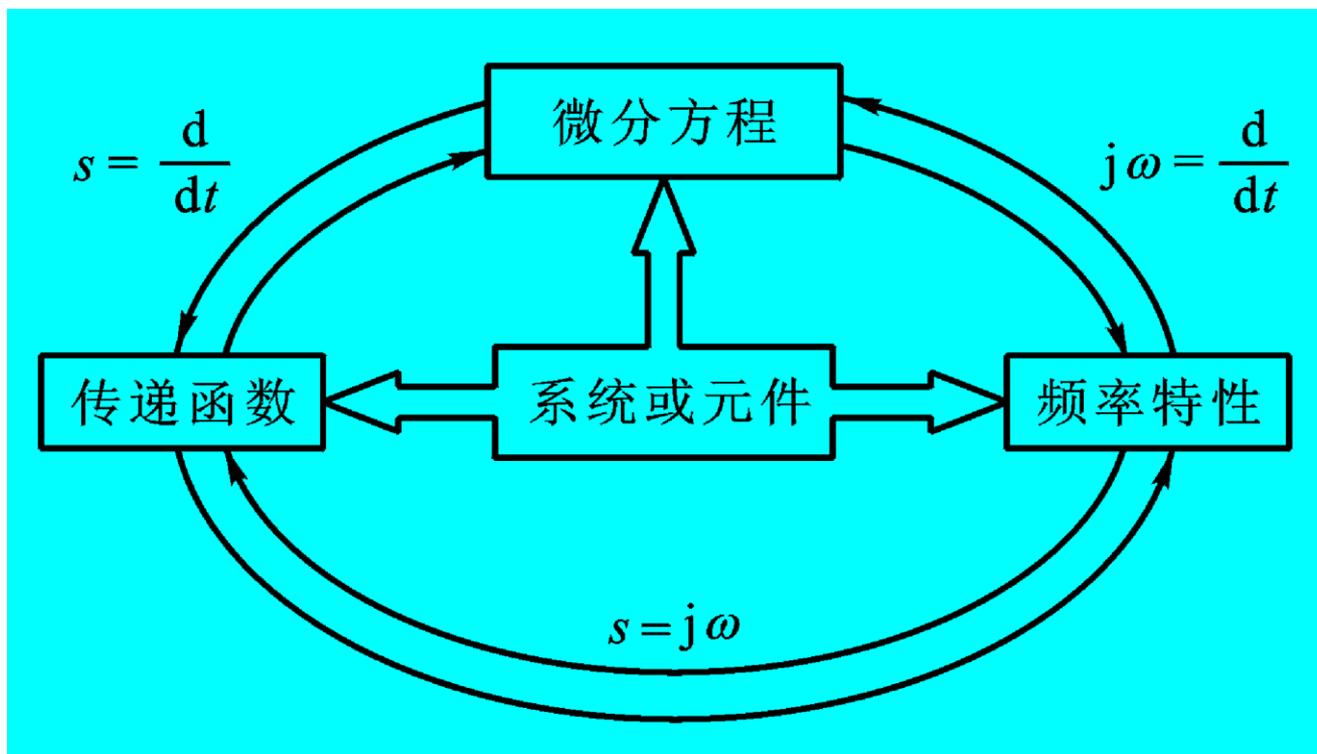
相频特性: $\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$

频率特性:

$$G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) = A(\omega) \angle \varphi(\omega)$$

频率特性的求法:

$$\text{频率特性} = \text{传递函数} \Big|_{s=j\omega}$$



线性系统数学模型间的关系

- 补例 设系统的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{0.5s + 1}$
- 试求输入信号 $r(t) = 10 \sin 2t$ 时, 系统的稳态输出 $c_{ss}(t)$.

解: 系统频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j0.5\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{0.25\omega^2 + 1}} \angle -\arctan 0.5\omega$$

当频率 $\omega = 2$ 时,

$$G(j2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

故系统的稳态输出为

$$c_{ss}(t) = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^\circ)$$

2、频率特性的几何表示法

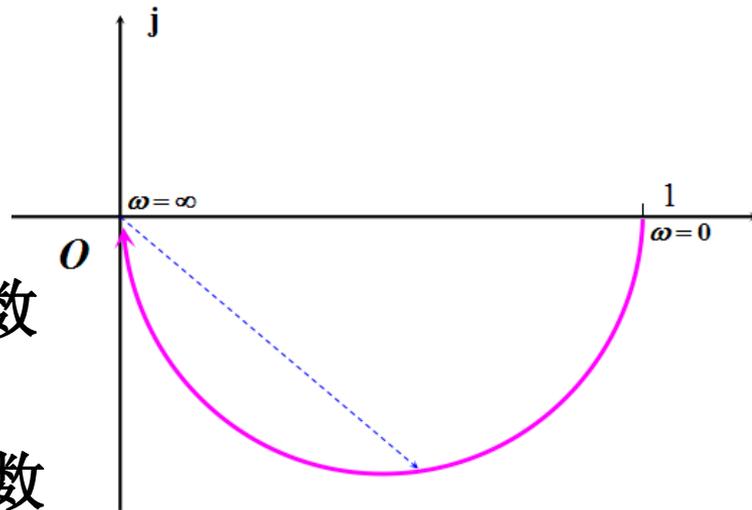
(1) 幅相频率特性曲线（极坐标图/幅相曲线）

幅相曲线： ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时， $G(j\omega)$ 在复平面上划过的轨迹。

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \quad \text{偶函数}$$

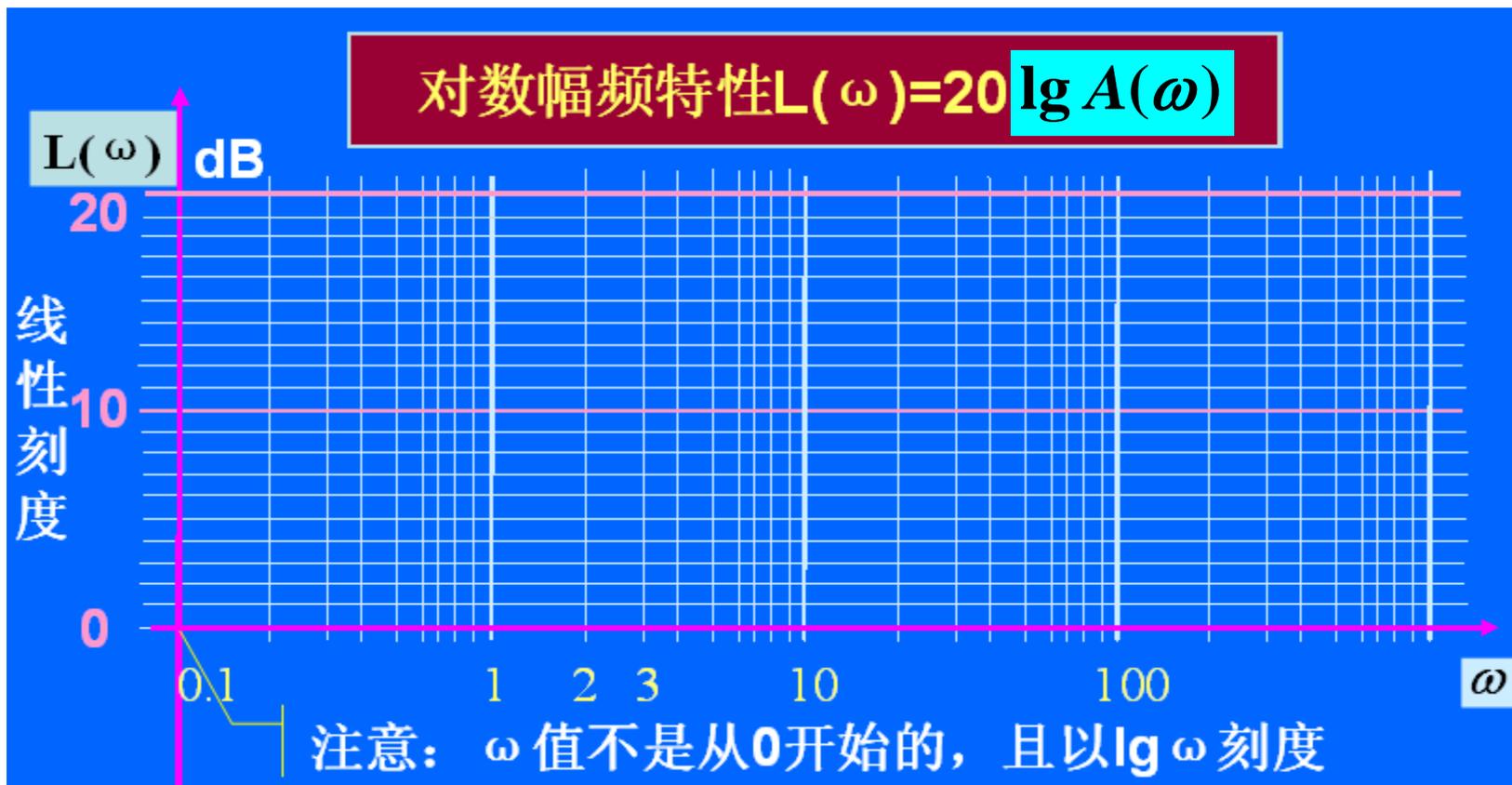
$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan T\omega \quad \text{奇函数}$$

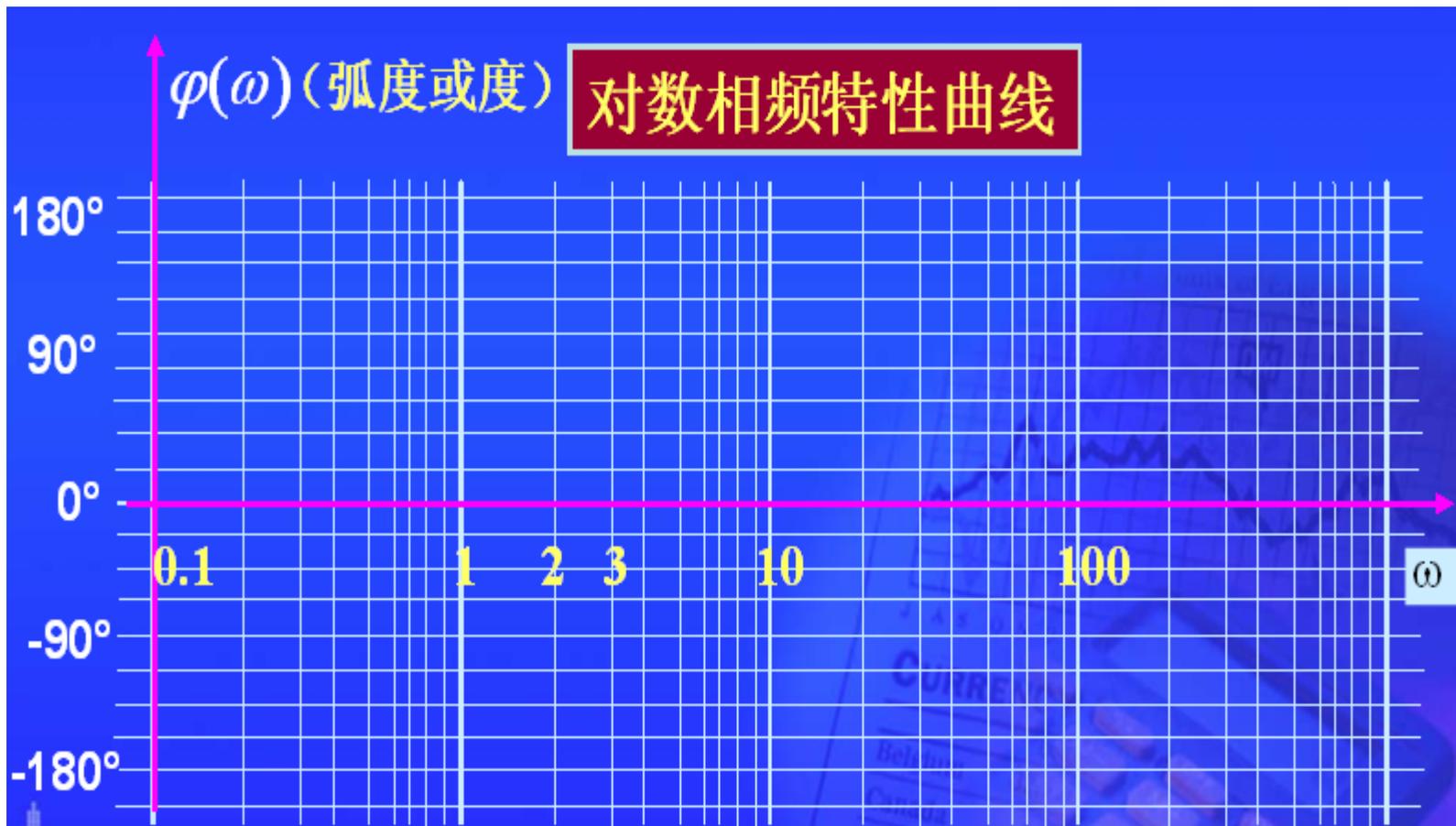


ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 和从 $0 \rightarrow -\infty$ 变化时的 $G(j\omega)$ 曲线关于实轴对称。

(2) 对数频率特性曲线—伯德图(H.W.Bode)

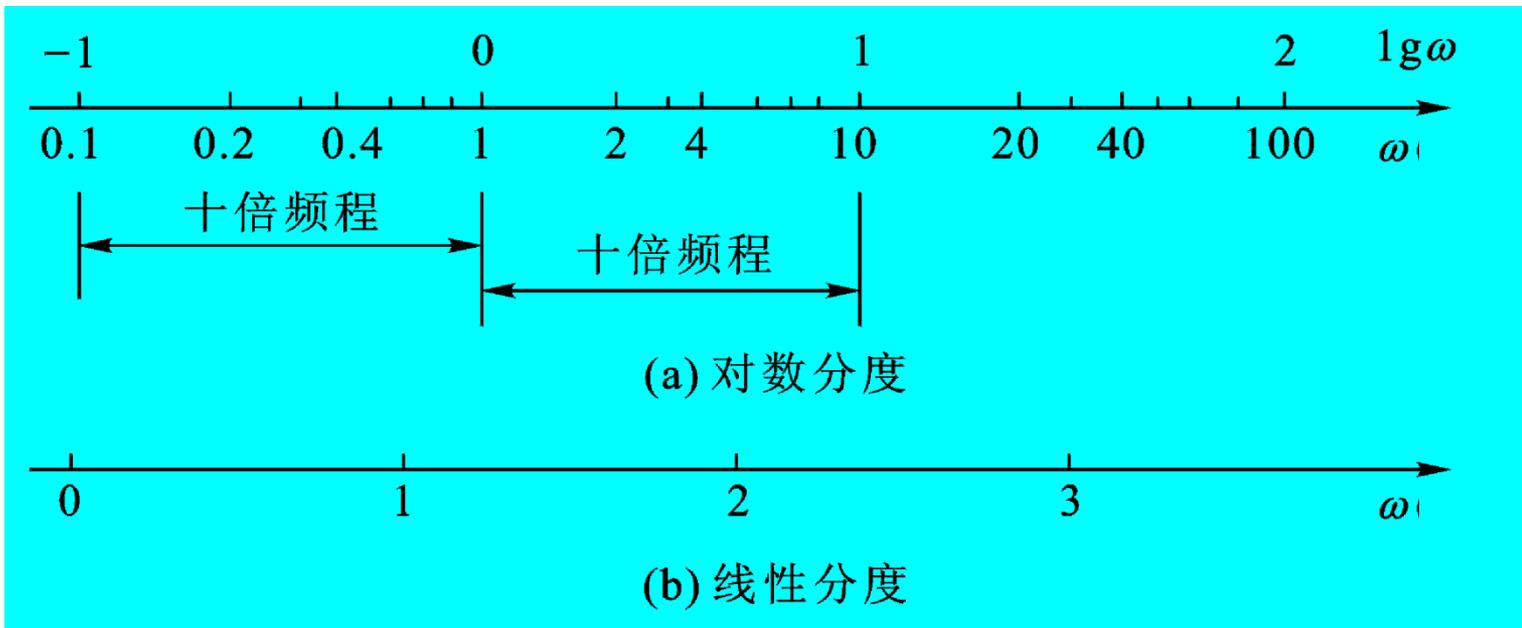
伯德图包括对数幅频和对数相频两条曲线。





横坐标同前；

纵坐标以度为单位线性分度。



对数分度中任一两个刻度之间的距离为:

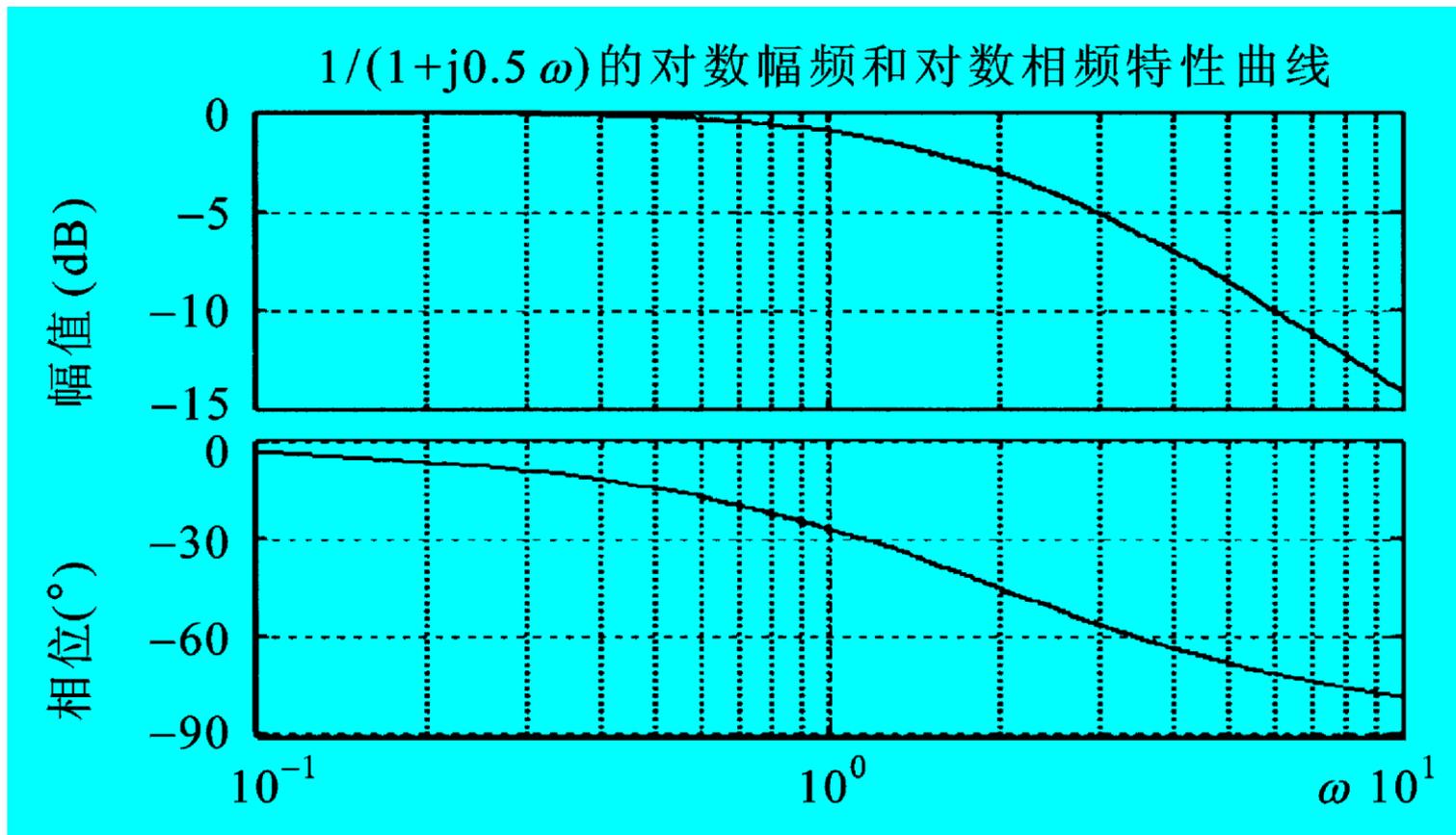
$$\lg \omega_2 - \lg \omega_1 = \lg \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

课本P172

表5-1: $\lg 2 = 0.301, \lg 3 = 0.477, \lg 4 = 0.602, \lg 5 = 0.699 \dots$

采用对数坐标图的优点是：

- (1) 对数刻度实现了横坐标的非线性压缩，扩大了研究问题的视野。即在同一图纸上可同时研究低中高频特性。
- (2) $20\lg A(\omega)$ 可以将幅值的乘除转化为加减，简化曲线的绘制。

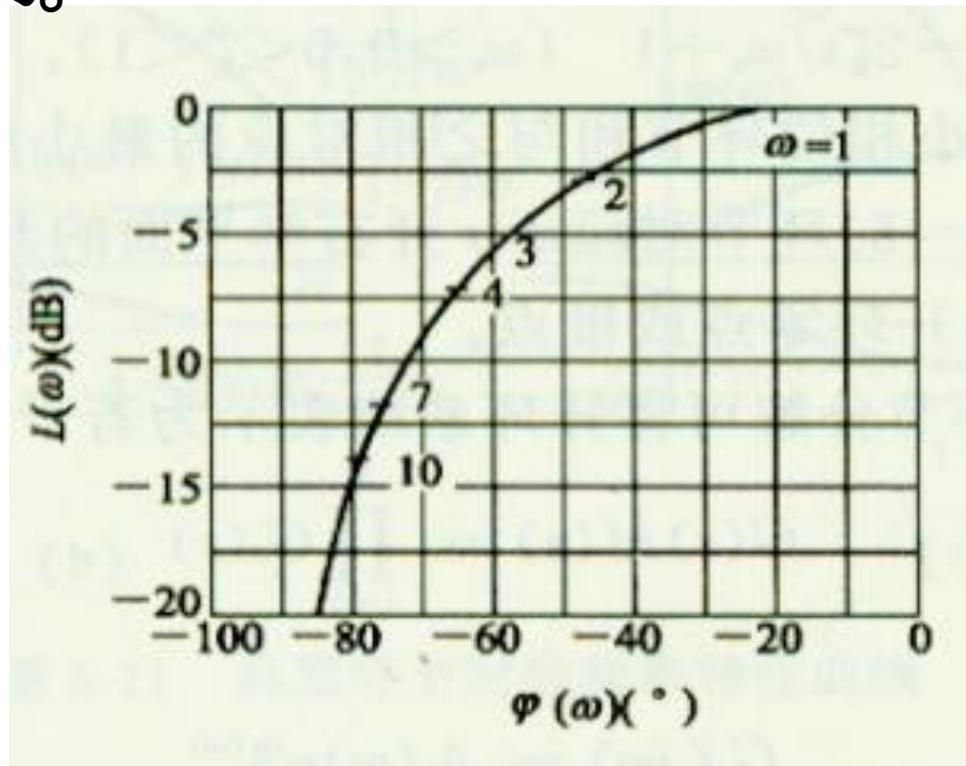


对数幅频和对数相频特性曲线

(3) 对数幅相曲线/尼柯尔斯曲线

它是由对数幅频特性和对数相频特性合并而成的曲线。横轴为相频 $\varphi(\omega)$ ，纵轴为 $L(\omega)$ 。横坐标和纵坐标均为线性刻度。

ω 为一个参变量标
在曲线上相应点的
旁边。



5.2 典型环节与开环系统频率特性

一、典型环节

将传递函数分解成因式乘积的形式，再对因式分类得典型环节。典型环节分为两类：**最小相位环节**和**非最小相位环节**。

最小相位环节

$$K \quad (K > 0)$$

$$1/s$$

$$s$$

$$1/(Ts + 1) \quad (T > 0)$$

$$Ts + 1$$

$$1/(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1) \quad (0 < \xi < 1)$$

$$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$$

非最小相位环节

$$K \quad (K < 0)$$

$$1/(-Ts + 1)$$

$$-Ts + 1$$

$$1/(T^2s^2 - 2\xi Ts + 1)$$

$$T^2s^2 - 2\xi Ts + 1$$

右半平面的零极点

开环传递函数可表示为若干典型环节相乘的形式:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

则:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \angle G(j\omega) \\ &= \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \angle G_3(j\omega) \\ &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)\end{aligned}$$

$$A(\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega) A_3(\omega)$$

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) + 20 \lg A_3(\omega)$$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega)$$

二、典型环节的频率特性 (对应P174图 5-10和5-11)

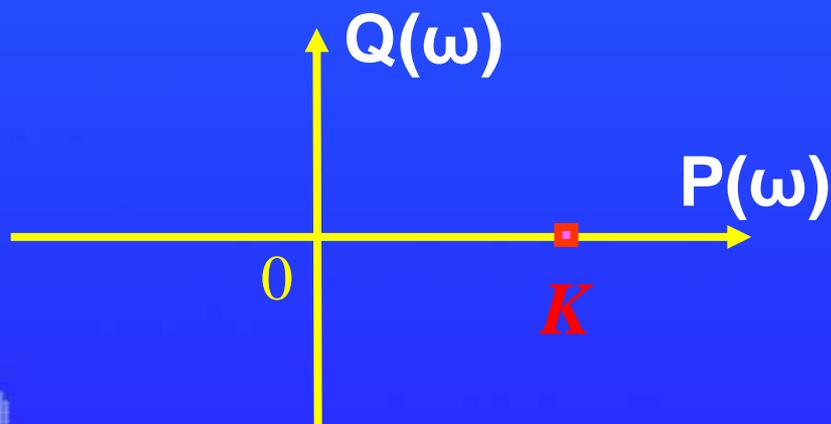
1. 比例环节

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = K$$

$$P(\omega) = K \quad Q(\omega) = 0$$

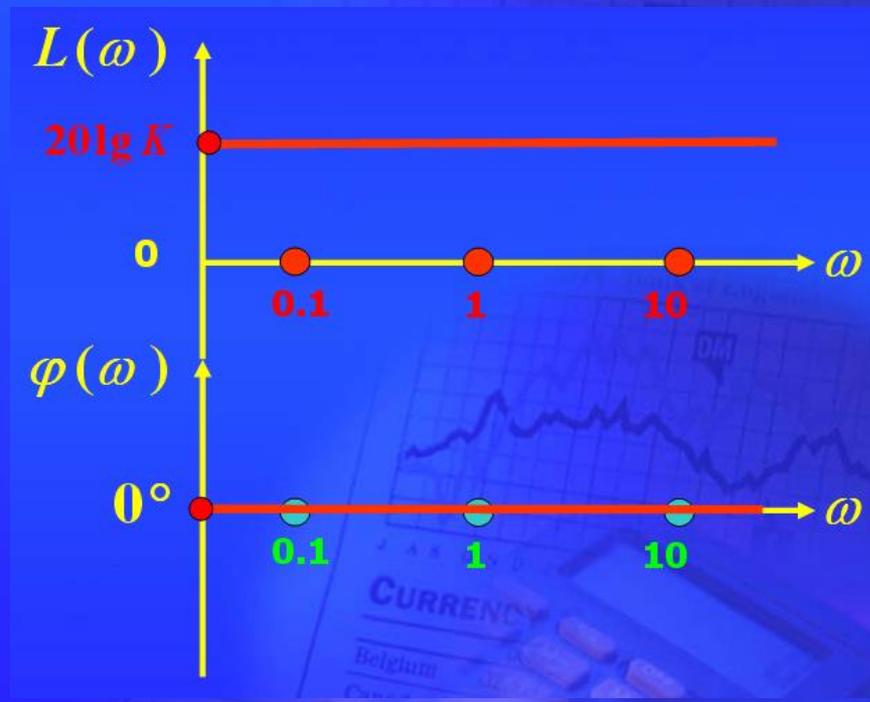
幅相频率特性

曲线:



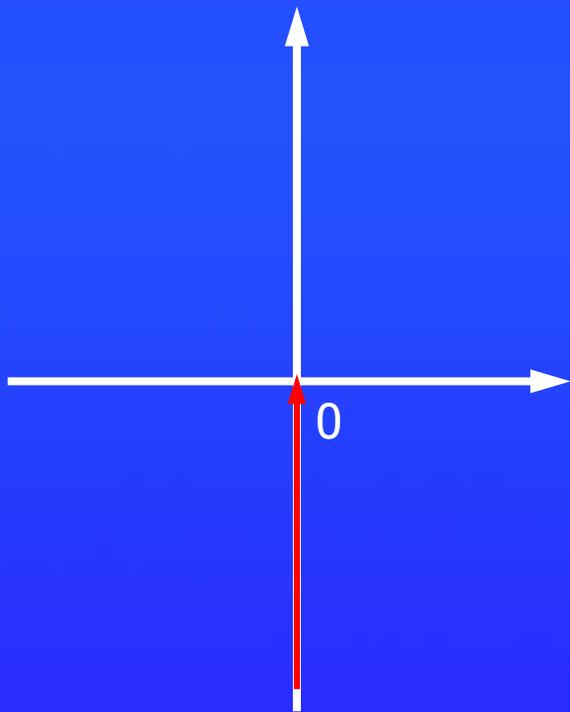
$$A(\omega) = K \quad L(\omega) = 20 \lg K$$
$$\varphi(0) = 0^\circ$$

伯德图:



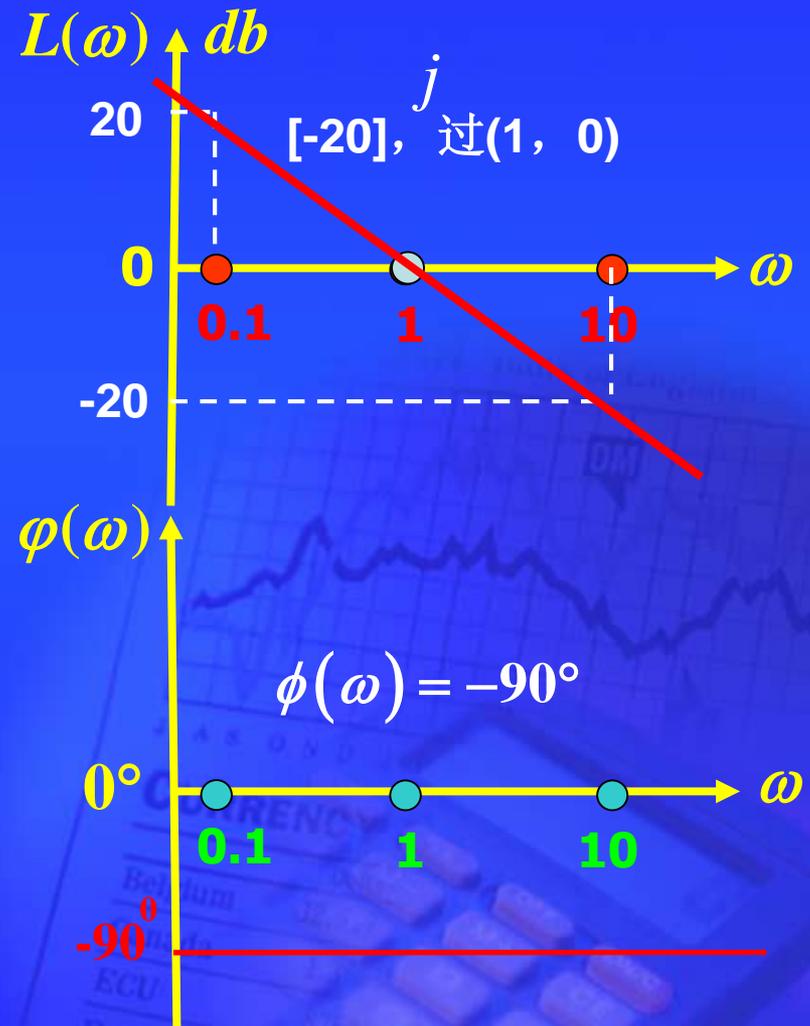
2. 积分环节

$$G(j\omega) = \frac{1}{s} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega}$$
$$= -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$



a、幅相曲线

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad L(\omega) = -20 \lg \omega$$



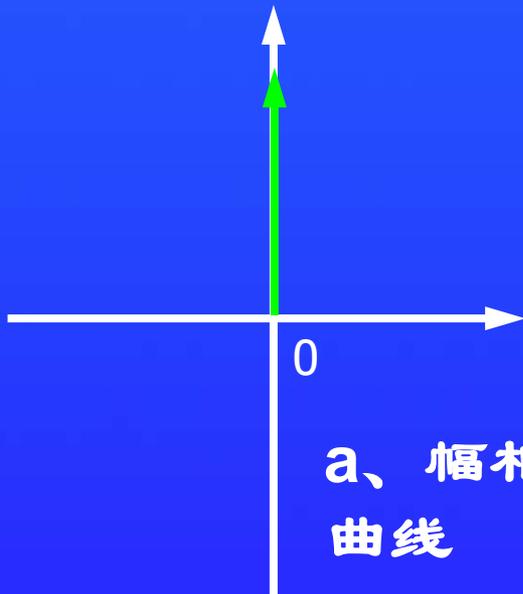
b、伯德图

3. 微分环节

$$L(\omega) = 20 \lg \omega$$

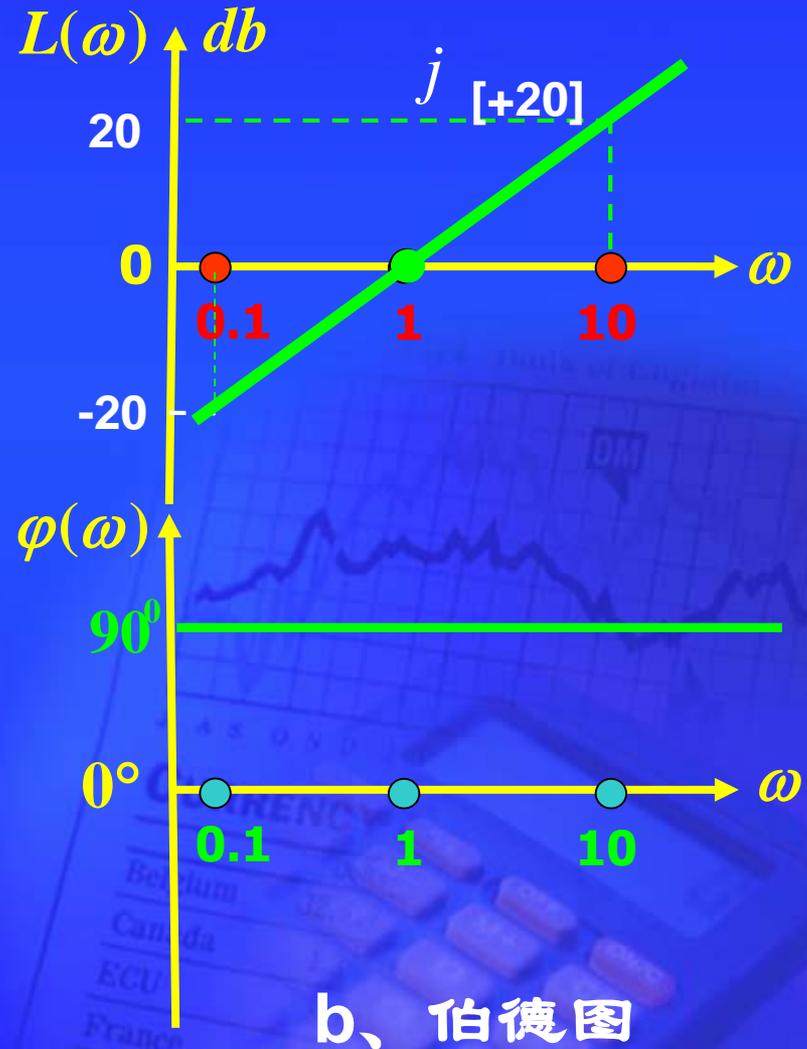
$$G(j\omega) = s \Big|_{s=j\omega} = j\omega$$

$$A(\omega) = \omega, \quad \varphi(\omega) = 90^\circ$$



传递函数
互为倒数的
环节， $L(\omega)$ 曲线
关于0dB
线对称，
 $\varphi(\omega)$ 曲线
关于 0°
线对称。

见P175最
后一段。



4. 惯性环节——伯德图

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad \phi(\omega) = -\arctan T\omega$$

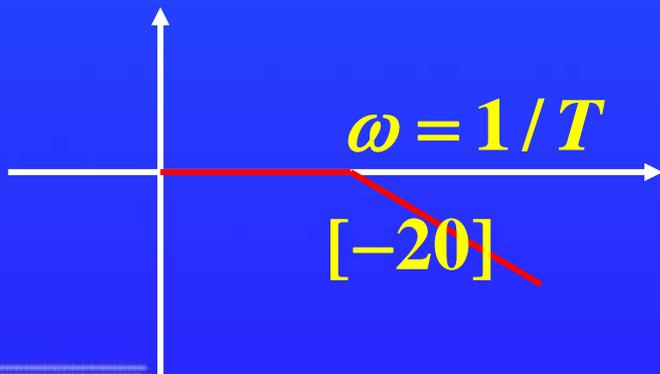
对应P178中下

低频段： ω 很小时的渐近线

$$\omega \ll \frac{1}{T}, A(\omega) \approx 1, L(\omega) \approx 20\lg 1 = 0 \quad \text{斜率为0的直线}$$

高频段： ω 很大时的渐近线

$$\omega \gg \frac{1}{T}, A(\omega) \approx \frac{1}{T\omega}, L(\omega) \approx 20\lg \frac{1}{T\omega} = 0 - 20\lg T\omega$$



斜率为-20dB/dec的直线

交接频率为 $1/T$

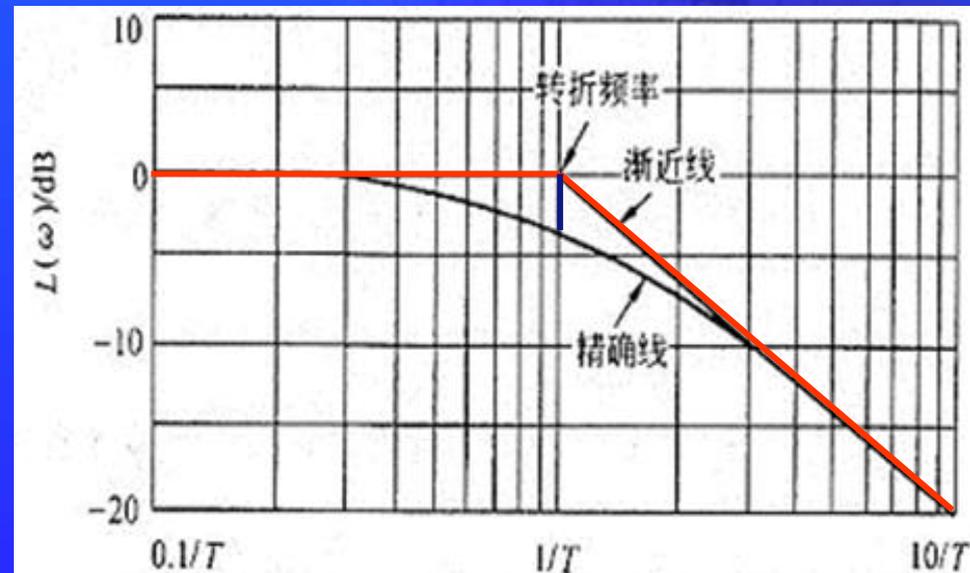
4. 惯性环节——伯德图

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad \phi(\omega) = -\arctan T\omega$$

渐近线在交接频率处误差最大，
其真实值为：

$$T\omega = 1, A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$L(\omega) = 20\lg \frac{1}{\sqrt{2}} \\ = -10\lg 2 \approx -3.01dB$$



$$G(s) = \frac{1}{-Ts + 1}, G(j\omega) = \frac{1}{1 - jT\omega}$$

由逐点计算法得相频特性：

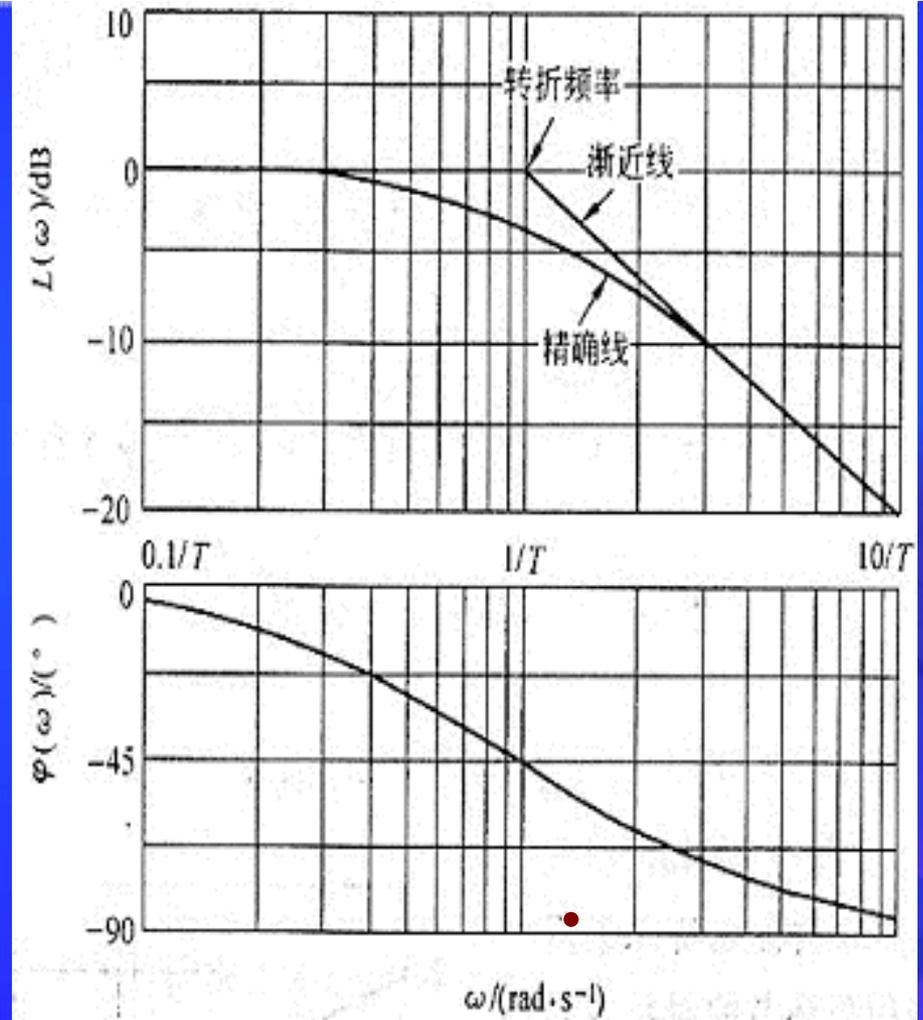
$$\phi(\omega) = -\arctan T\omega$$

也可由下面的点得到近似曲线：

$$\omega \rightarrow 0, \phi(\omega) \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty, \phi(\omega) \rightarrow -90^\circ$$

$$T\omega = 1, \phi(\omega) = -45^\circ$$

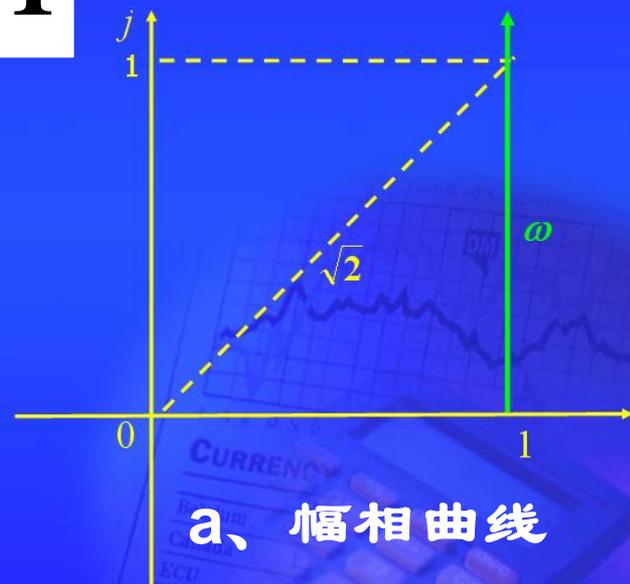


$$G(s) = -Ts + 1$$

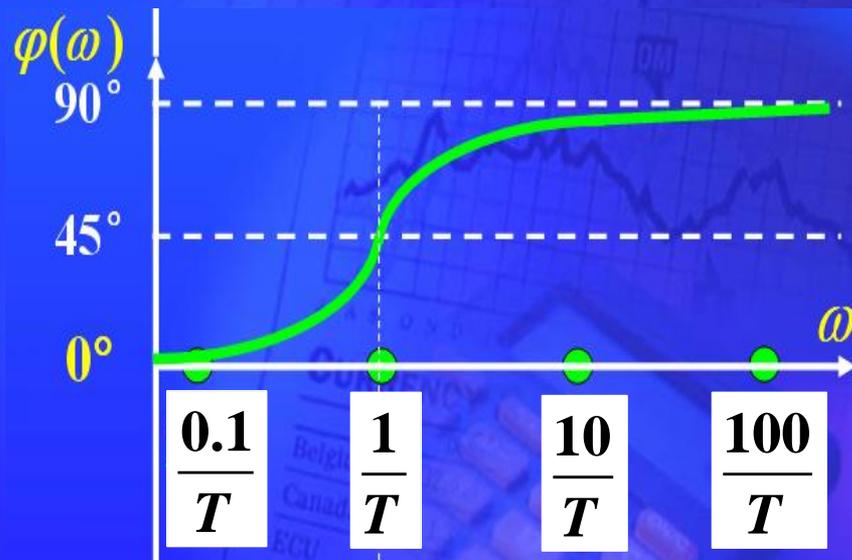
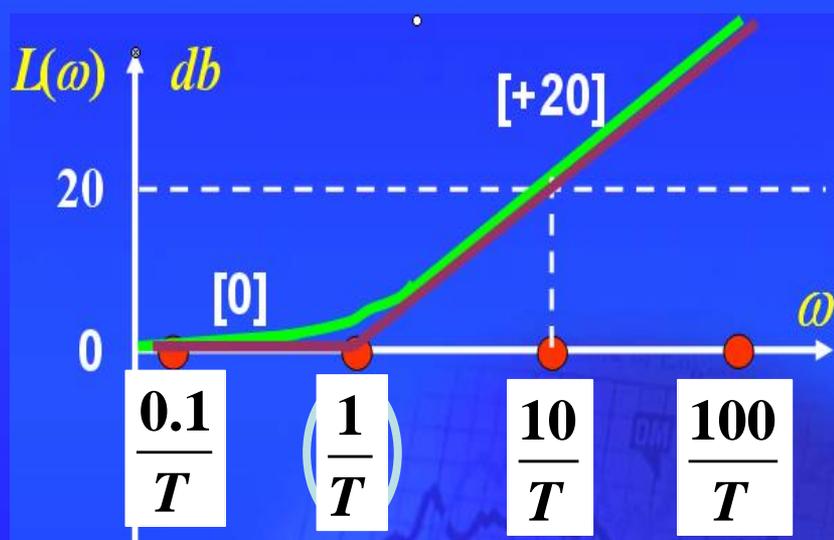
5. 一阶微分环节

$$G(s) = Ts + 1 \Rightarrow G(j\omega) = 1 + jT\omega$$

$$\begin{cases} P(\omega) = 1, Q(\omega) = T\omega \\ A(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2}, \varphi(\omega) = \arctan T\omega \end{cases}$$



b、伯德图 $(1/T, 0), [+20]$



(3) 振荡环节 P176

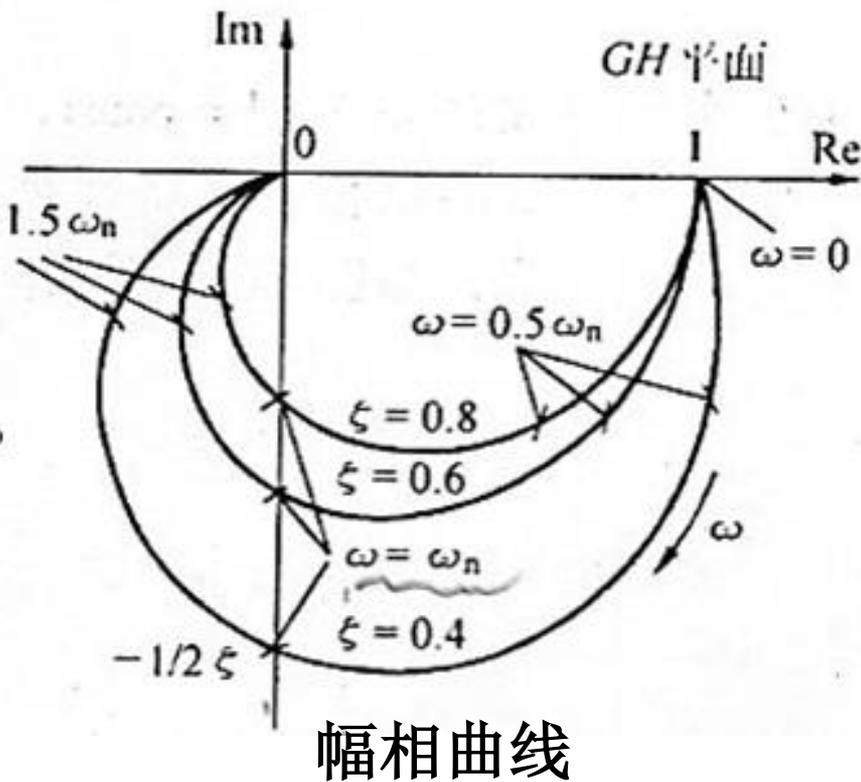
传递函数:
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}, T\omega < 1 \\ -(180^\circ + \arctan \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}), T\omega > 1 \end{cases}$$

描点法

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0, & \quad \angle 0^\circ \\ \omega \rightarrow \infty, & \quad \angle -180^\circ \\ \omega = \omega_n, & \quad \frac{1}{2\xi} \angle -90^\circ \\ & \quad \left(0, \frac{-1}{2\xi}\right) \end{aligned}$$



b、伯德图：

课本P179

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}}, \varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}$$

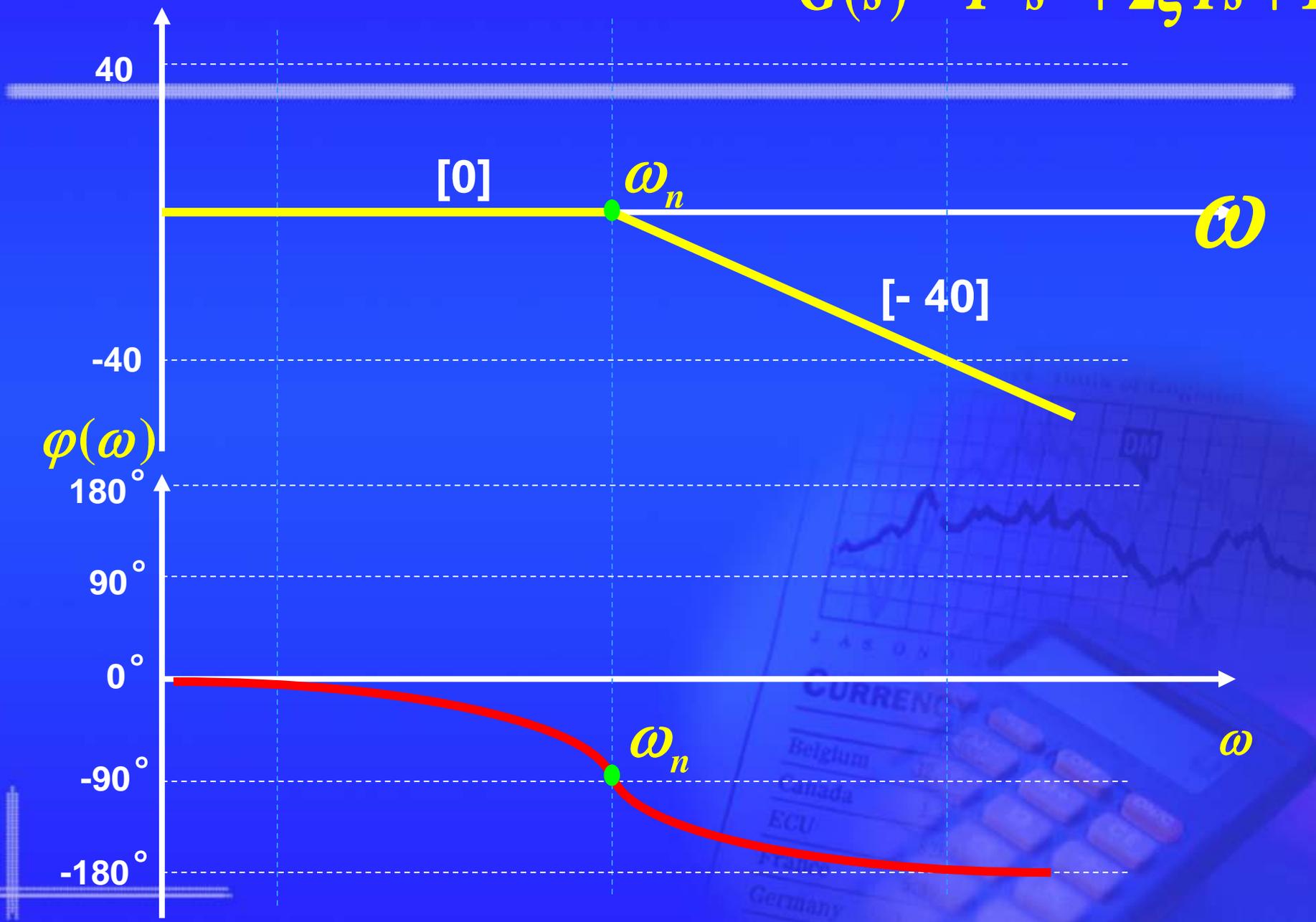
低频渐近线： $\omega \rightarrow 0, A(\omega) = 1, L(\omega) = 0\text{dB}$

高频渐近线： $\omega \rightarrow \infty, A(\omega) = \frac{1}{T^2\omega^2}, L(\omega) = -40\lg T\omega$

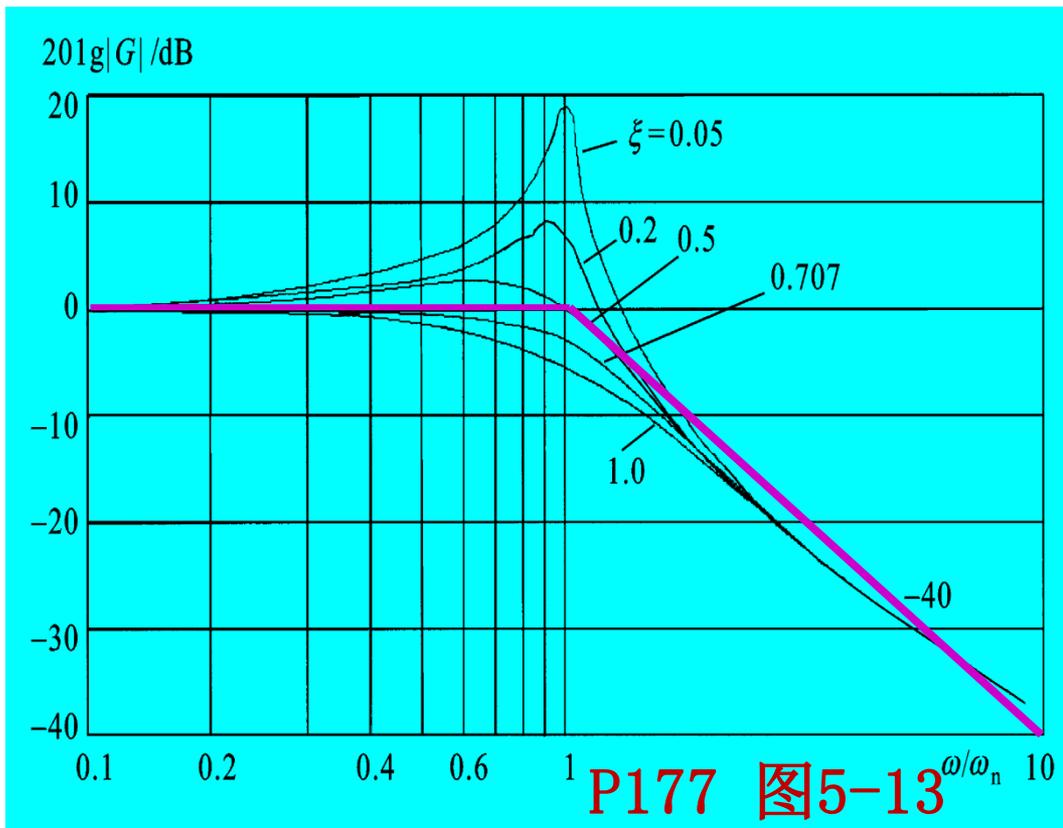
(过 $(\omega_n, 0)$ 点，斜率为 $[-40\text{dB}]$ 的直线)

交接频率为： $\omega = 1/T = \omega_n$

$L(\omega)$ db ★幅频采用渐近线 $G(s) = T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1$



对于不同的阻尼比 ξ ，振荡环节的精确对数幅频特性



$0 < \xi < 0.707$

出现峰值；

ξ 越小，谐振峰值和
谐振频率越大。

$\xi > 0.707$ 无峰值。

谐振频率 ω_r ：

对应P176式5-36和5-37

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}; \quad M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

- P180上面第二段
半对数坐标系中直线方程的为

$$k = \frac{L_a(\omega_2) - L_a(\omega_1)}{\lg \omega_2 - \lg \omega_1}$$

其中, $[\omega_1, L_a(\omega_1)], [\omega_2, L_a(\omega_2)]$ 为直线上的两点,

$k(\text{dB} / \text{dec})$ 为直线斜率。

小结 (1) 最小相位环节相频特性的变化范围是:

比例环节相位: 0° ; 一阶微分环节相位: $0^\circ \rightarrow +90^\circ$;

积分环节相位: -90° ; 振荡环节相位: $0^\circ \rightarrow -180^\circ$;

微分环节相位: $+90^\circ$; 二阶微分环节相位: $0^\circ \rightarrow +180^\circ$ 。

惯性环节相位: $0^\circ \rightarrow -90^\circ$;

(2) 最小相位环节 $L(\omega)$ 曲线的特点: (交接频率: 时间常数的倒数)

比例环节: 一条水平线

积分环节: 斜率为 -20dB/dec 的直线, 过 $(1, 0)$ 点

微分环节: 斜率为 $+20\text{dB/dec}$ 的直线, 过 $(1, 0)$ 点

惯性环节: 交接频率前的为 0dB , 交接频率后的为 -20dB/dec 的两折线

一阶微分环节: 交接频率前后分别为 0dB 和 $+20\text{dB/dec}$ 的两折线

振荡环节: 交接频率前后分别为 0dB 和 -40dB/dec 的两折线

二阶微分环节: 交接频率前后分别为 0dB 和 $+40\text{dB/dec}$ 的两折线

3. 开环幅相特性曲线的绘制

概略开环幅相曲线应能反映以下三要素

- 1) 起点 ($\omega \rightarrow 0_+$) 和终点 ($\omega \rightarrow \infty$)
- 2) 与实轴的交点 $\left\{ \begin{array}{l} 1) \operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0 \rightarrow \omega \rightarrow \operatorname{Re}[G(j\omega)] \\ 2) \varphi(\omega) = -180^\circ \rightarrow \omega \rightarrow A(\omega) \end{array} \right.$
- 3) 曲线的变化范围 (象限、单调性)

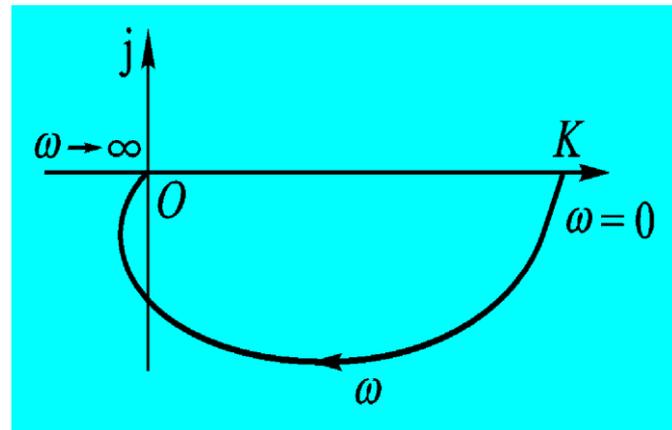
例5-1 某0型单位反馈控制系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ ，试绘制系统的开环幅相曲线。

解：
$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)}$$

当 $\omega=0$ 时 $G(j0) = K \angle 0^\circ$

当 $\omega=\infty$ 时 $G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$

由于惯性环节单调地从 0° 变化到 -90° ，故该曲线的变化范围为第IV和第III象限。幅相曲线如图所示。



例5-2 某系统开环传递函数

为 $G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ ，K、 T_1 、 T_2 都大于0，试绘制系统的开环幅相曲线。

解

由此知，若开环传函中含有v个积分环节，起始角就为v 个 -90° 。

相频特性范围： $-90^\circ \rightarrow -270^\circ$ 。

与实轴相交时的频率值为：

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan T_1\omega - \arctan T_2\omega$$

$$\omega = 1 / \sqrt{T_1 T_2}$$

$$= -90^\circ - \arctan \frac{T_1\omega + T_2\omega}{1 - T_1 T_2 \omega^2}$$

例5-4 系统开环传递函数为 $G_K(s) = \frac{K(-\tau s + 1)}{s(Ts + 1)}$; $K, \tau, T > 0$
试绘制系统的开环幅相特性曲线。

解:
$$G_K(j\omega) = \frac{K(-j\tau\omega + 1)}{j\omega(j\omega T + 1)}$$

当 $\omega \rightarrow 0$ 时 $G_K(j0) = \infty \angle -90^\circ$

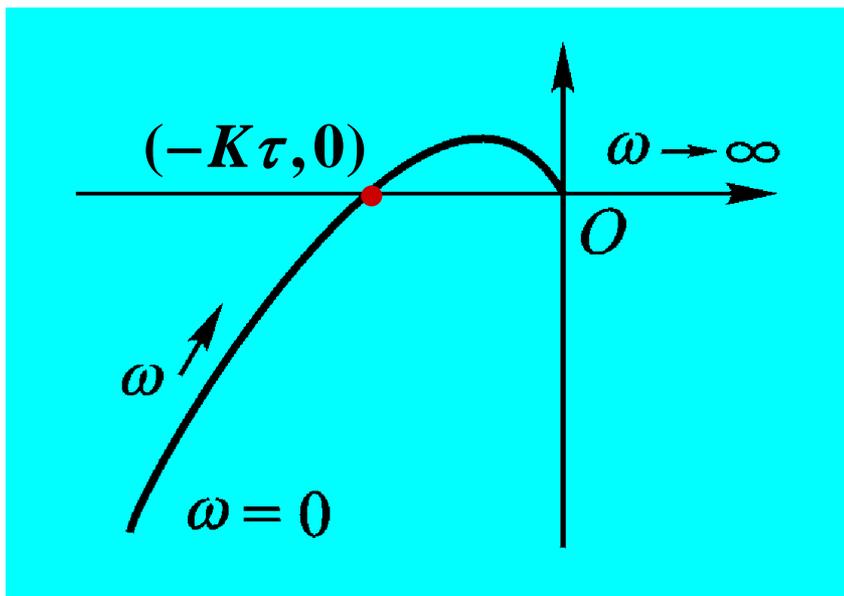
当 $\omega \rightarrow \infty$ 时 $G_K(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$

由 $\varphi(\omega) = -\text{tg}^{-1} \tau\omega - 90^\circ - \text{tg}^{-1} T\omega = -180^\circ$ 得

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T\tau}} \Rightarrow A(\omega) = K\tau$$

与实轴的交点为 $(-K\tau, j0)$.

因相频特性由 -90° 单调衰减至 -270° , 故幅相曲线在第III和第II象限内变化。概略幅相曲线如下。



P184上面第二段

两个概念:

最小相位系统

非最小相位系统

4. 开环对数频率特性曲线

开环对数幅频

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega)$$

开环对数相频

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$$

系统开环对数幅频等于各环节对数幅频之和；系统开环对数相频等于各环节对数相频之和。

绘制 $L(\omega)$ 渐近特性曲线的步骤小结: P185最上面

(1) 将开环频率特性 $G(j\omega)$ 化成尾1形式——即典型环节乘积的形式;

(2) 求出各环节的交接频率, 并从小到大依次标在 ω 轴上;

(3) 绘制低频段: $(\frac{K}{\omega^v} = 1, 0)$

a、计算 $20\lg K$, 找出 $(1, 20\lg K)$ 点;

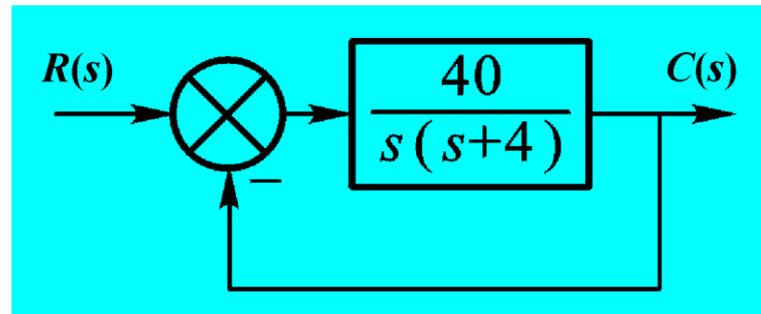
b、过此点, 做斜率为 $-20v$ dB/dec的折线。

(4) 从低频段开始, 沿 ω 轴每碰到一交接频率, 斜率就改变一次 (P185, 表5-2), 直至经过所有交接频率;

表5-2 交接频率点处斜率的变化表

典型环节	传递函数	交接频率	斜率变化
一阶环节 ($T>0$)	$1/(1+Ts)$	$1/T$	-20dB/dec
	$1/(1-Ts)$		
	$1+Ts$		20dB/dec
	$1-Ts$		
二阶环节 ($\omega>0, \zeta>0$)	$1/(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1)$	$1/T$ 或 ω_n	-40dB/dec
	$1/(\frac{s^2}{\omega_n^2} - 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1)$		
	$\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1$		40dB/dec
	$\frac{s^2}{\omega_n^2} - 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1$		

补例 已知单位负反馈系统如图所示，试做出系统的开环 $L(\omega)$ 。



解：作 $L(\omega)$ ：

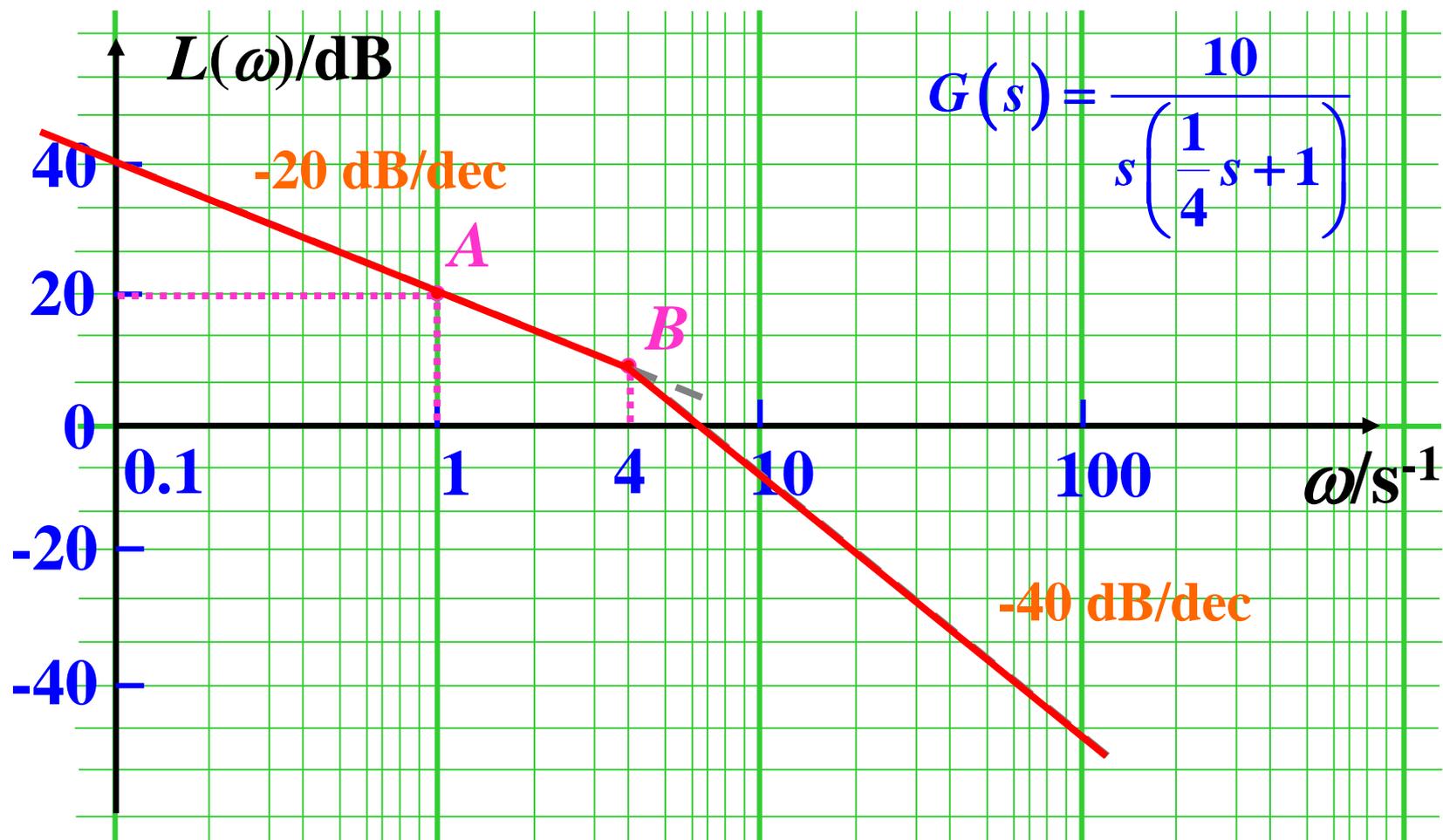
$$(1) G(s) = \frac{40}{s(s+4)} = \frac{10}{s\left(\frac{1}{4}s+1\right)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

因此，开环增益 $K=10$

交接频率

$$\omega_1 = \frac{1}{T} = 4 \quad 20 \lg K = 20 \text{ dB}$$

- 故低频段过 $\omega=1$, $L(\omega)=20dB$ 这一点, 斜率为 $-20db/dec$;
- 低频段至转折频率 $\omega=4$ 处, 折线斜率变为 $-40db/dec$ 。
- 绘图如图所示



例5.5 已知一单位负反馈系统开环传递函数

$$G_k(s) = \frac{2000s - 4000}{s^2(s+1)(s^2+10s+400)}$$

试作系统开环 $L(\omega)$ 。

解：

$$G_k(s) = \frac{-10\left(-\frac{s}{2} + 1\right)}{s^2(s+1)\left(\frac{s^2}{20^2} + \frac{s}{40} + 1\right)}$$

(1) 低频段：斜率为 -40dB/dec ，

过 $\omega=1$ ， $L(\omega)=20\lg 10=20\text{dB}$ 点。

$$G_k(s) = \frac{-10 \left(-\frac{s}{2} + 1 \right)}{s^2 (s+1) \left(\frac{s^2}{20^2} + \frac{s}{40} + 1 \right)}$$

(2) 各交接频率及交接后的斜率如下

$$\omega_1 = 1, \quad k_1 = -60dB / dec$$

$$\omega_2 = 2, \quad k_2 = -40dB / dec$$

$$\omega_3 = 20, \quad k_3 = -80dB / dec$$

综上所述， $L(\omega)$ 如P187页图5-23所示。

- 6. 传递函数的频域实验确定

- (1) 频率响应实验

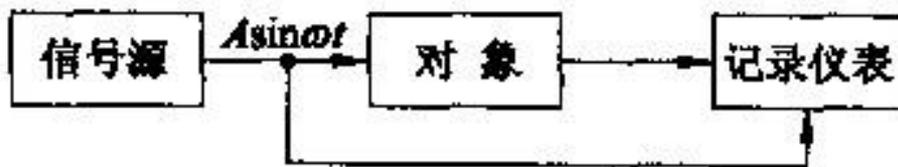


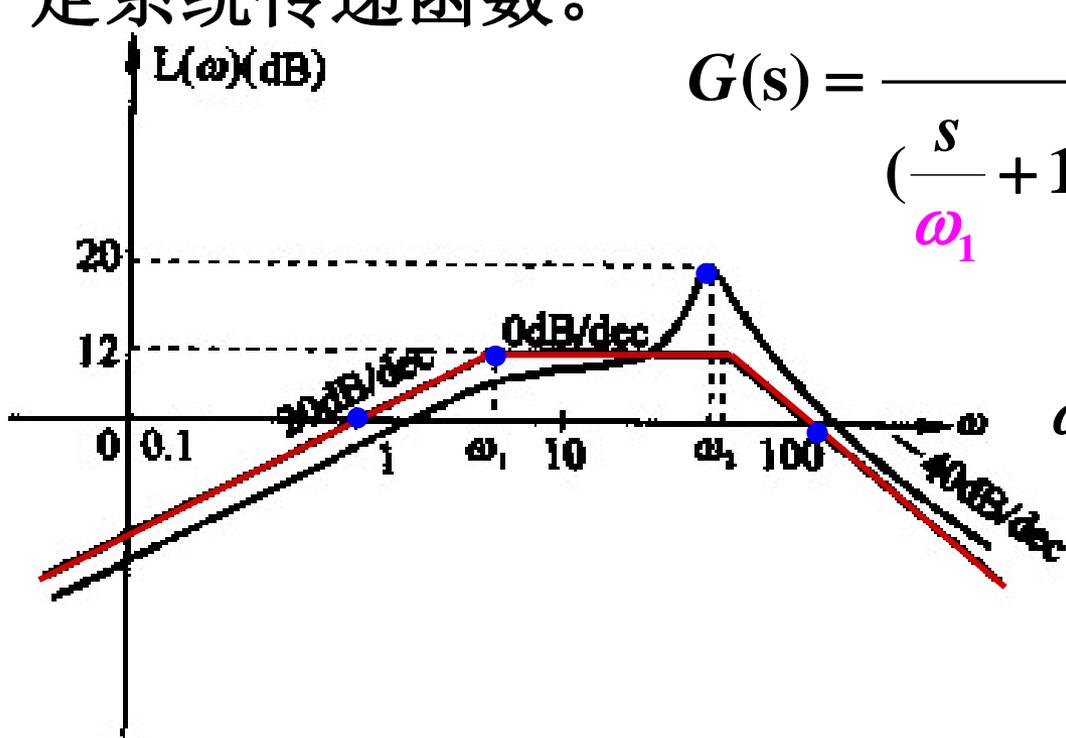
图 5-26 频率响应实验原理

- (2) 传递函数的确定

由对数幅频渐近特性曲线确定最小相位系统的传递函数。

$$L_a(\omega) \rightarrow G(s)$$

例5-6 图为由频率响应曲线获得的某最小相位系统的对数幅频曲线和对数幅频渐近线，试确定系统传递函数。

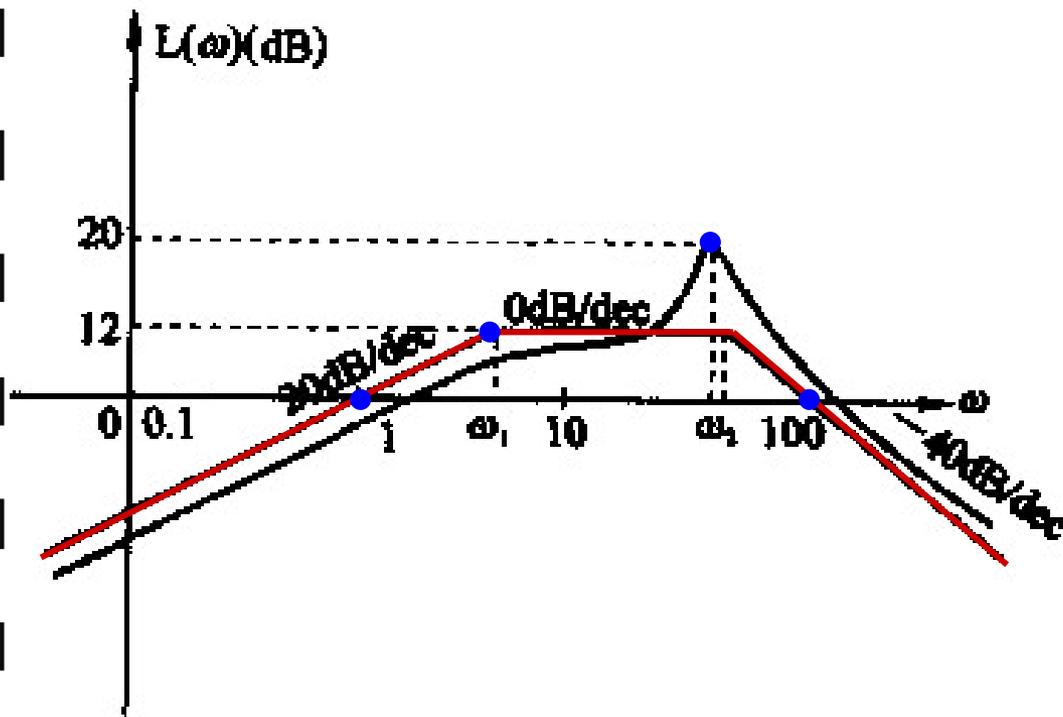


$$G(s) = \frac{Ks}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \left(\frac{s^2}{\omega_2^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_2} + 1\right)}$$

$$\omega \leq \omega_1 : L(\omega) = 20 \lg K \omega$$

$$\frac{L(\omega_1) - L(1)}{\lg \omega_1 - \lg 1} = 20$$

$$\frac{L(100) - L(\omega_2)}{\lg 100 - \lg \omega_2} = -40 \quad L(\omega_r) = 20 \lg M_r = 20 \lg \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = 20 - 12$$



$$0 < \omega \leq \omega_1 : A(\omega) = K \omega$$

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 :$$

$$A(\omega) = \frac{K \omega}{\omega_1} \cdot 1$$

$$\omega \geq \omega_2 : A(\omega) = \frac{K \omega}{\omega_1 \omega_2}$$

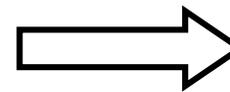
已知条件:

$$L_a(1) = 0$$

$$L_a(\omega_1) = 12$$

$$L_a(100) = 0$$

$$L(\omega_r) = 20 \lg \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} = 20 - 12$$



$$K = 1$$

$$\omega_1 = 3.98$$

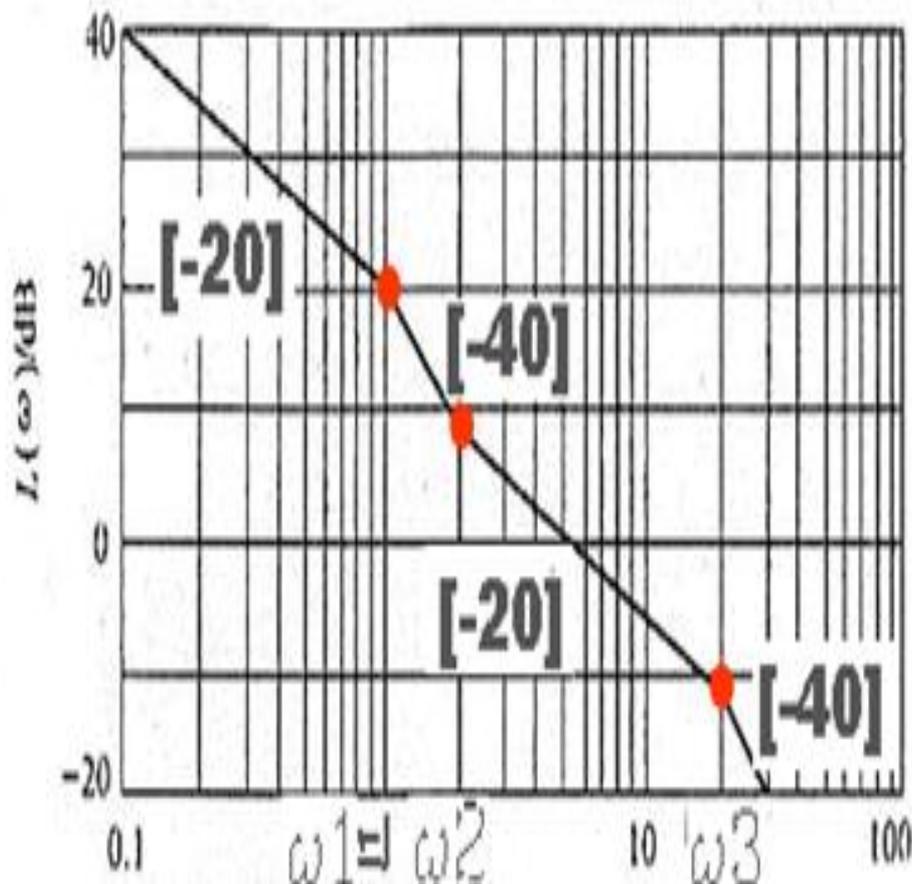
$$\omega_2 = 50.1$$

$$\zeta = 0.204$$

$$L_a(\omega) \Rightarrow G(s)$$

$$G(s)$$

$$= \frac{10(0.5s + 1)}{s(s + 1)(0.05s + 1)}$$



小结:

(1) 正问题。

$$G(s) \Rightarrow L_a(\omega), \varphi(\omega)$$

(2) 反问题。

$$L_a(\omega) \Rightarrow G(s) \text{ 最小相位系统}$$

解决上述两类问题的关键是熟练掌握各典型环节的 $L_a(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 曲线！！